Tentamen Besliskunde 1
19 december 2007, 14.00-17.00 uur

Het tentamen bestaat uit twee gedeelten. Het eerste deel gaat over de theorie en daarbij mag geen dictaat of ander materiaal worden gebruikt. Het tweede deel betreft het toepassen van de theorie in enkele opgaven en hierbij mogen het dictaat en de zelf gemaakte opgaven worden ingezien. Je kunt zelf bepalen hoelang je aan het eerste deel werkt. Als je dat hebt ingeleverd, dan kun je in een ander lokaal deel 2 maken. Bij het opstellen van het tentamen is getracht dit zo te doen dat beide delen ongeveer evenveel tijd zouden kosten. Alle 6 opgaven tellen even zwaar mee in het eindcijfer.

Deel 1: Theorie

Opgave 1: Depth-First Search
DFS (Depth-First Search) in een gerichte graaf $G = (V, A)$ verdeelt de pijlenverz. A in pijlenverz. F, I, D en C. De deelgraaf $T = (V, F)$ is een opspannend gericht bos in G. Toon aan dat geldt: Zij $G_1 = (V_1, A_1)$ een streng samenhangende component van G, dan is de deelgraaf van T bestaande uit de knooppunten V_1 en de daartussen lopende pijlen van F een gerichte opspannende boom van G_1.

Opgave 2: Stelling van het scheidende hypervlak
Toon het volgende aan:
Zij $C \in \mathbb{R}^n$ een gesloten convexe verzameling en $x \notin C$. Dan is er een scheidend hypervlak, d.w.z. er bestaan reële getallen $a_0, a_1, \ldots, a_n$ zdd.

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n > a_0 \text{ en } a_1y_1 + a_2y_2 + \cdots + a_ny_n < a_0 \text{ voor alle } y \in C.$$

Opgave 3: Periode van een irreducibele Markov keten
Beschouw een irreducibele Markov keten met overgangsmatrix P en met periode d.
Laat G de bij de Markov keten behorende gerichte streng samenhangende graaf zijn
(G bevat de pijl (i, j) d.e.s.d. als $p_{ij} > 0$).
Laat B een opspannende gerichte boom in G zijn met een willekeurig gekozen wortel v_1 en laat $k(i)$ het aantal pijlen in B zijn om van v_1 naar v_i te komen voor alle i.
Bewijs dat geldt: $d = g.g.d.\ \{k(i) + 1 - k(j) \mid (v_i, v_j) \notin B\}$.

Deel 2: Opgaven

Opgave 4: Voortbrengende functies en recurrente betrekkingen

Los de volgende recurrente betrekking op met de methode van voortbrengende functies:

$$\begin{cases} a_{n+2} = 2a_{n+1} - a_n + n, \; n \geq 0 \\ a_0 = 1, \; a_1 = 2 \end{cases}$$

Opgave 5: Lineaire optimalisering

Beschouw het volgende LP-probleem:

$$max \left\{ x_1 - 3x_2 + x_3 \;\middle|\; \begin{array}{ccccccl} x_1 & + & 2x_2 & - & 3x_3 & \leq 3; & x_1 \geq 0 \\ x_1 & & & + & x_3 & \leq 5; & x_2 \geq 0 \\ & - & x_2 & + & x_3 & \leq 0; & x_3 \geq 0 \end{array} \right\}$$

a. Bepaal met de simplex methode een optimale oplossing.

b. Formuleer het duale probleem en geef ook daarvan een optimale oplossing.

c. Is de optimale oplossing van het oorspronkelijke probleem uniek? Verklaar uw antwoord
   Is de optimale oplossing van het duale probleem uniek? Verklaar uw antwoord

d. Wat is een optimale oplossing als de eerste beperking een gelijkheid is?

e. Wat is zijn de optimale oplossingen van het oorspronkelijke en het duale probleem als x_2 een vrije variabele is?

Opgave 6: Markov ketens

Beschouw een Markov keten met $S = \{1, 2, \ldots, 6\}$ die de volgende overgangsmatrix heeft, waarbij $\alpha_i \geq 0$ voor alle i en $\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_6 = 1$):

$$P = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4 & \alpha_5 & \alpha_6 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Wat is de kans dat het systeem (op de lange duur) in toestand 1 is?