Tentamen Besliskunde 1
(Woensdag 17-12-2008, 14.00-17.00 uur)

Het tentamen bestaat uit twee gedeelten. Het eerste deel gaat over de theorie en daarbij mag geen dictaat of ander materiaal worden gebruikt. Het tweede deel betreft het toepassen van de theorie in enkele opgaven en hierbij mogen het dictaat, de zelf gemaakte opgaven en eventueel ander matariaal worden gebruikt. Je kunt zelf bepalen hoelang je aan het eerste deel werkt. Als je dat hebt ingeleverd, dan kun je in een ander lokaal deel 2 maken. Alle 6 opgaven tellen even zwaar mee in het eindcijfer.

Deel 1: Theorie

Opgave 1: Stelling van Ore
Zij $G = (V, E)$ een normale graaf met n knooppunten. De graad van een knooppunt x wordt genoteerd met $d(x)$. Bewijs de volgende bewering:

Als $d(v) + d(w) \geq n$ voor ieder tweetal niet-aangrenzende knooppunten $v, w \in V$, dan heeft G een Hamilton kring.

Opgave 2: Homogene recurrente betrekkingen
Beschouw de homogene recuurente betrekking

$$\begin{cases} a_n = Aa_{n-1} + Ba_{n-2},\ n = 3, 4, \ldots \\ a_1,\ a_2 \text{ gegeven randvoorwaarden,} \end{cases}$$

waarin A en B constanten zijn die niet van n afhangen.
Toon het volgende aan:

(1) Als de karakteristieke vergelijking $x^2 - Ax - B = 0$ twee verschillende wortels α en β heeft, dan is $a_n = K_1\alpha^n + K_2\beta^n,\ n \geq 1$, waarbij K_1 en K_2 uniek worden bepaald door a_1 en a_2.
(2) Als de karakteristieke vergelijking $x^2 - Ax - B = 0$ een tweevoudige wortel α heeft, dan is $a_n = (K_1 + nK_2)\alpha^n,\ n \geq 1$, waarbij K_1 en K_2 uniek worden bepaald door a_1 en a_2.

Opgave 3: Stationaire matrix
Zij x een stationaire kansverdeling van de Markov keten met overgangsmatrix P.
Laat $R_1, R_2, \ldots, R_m$ de recurrente klassen zijn, T de verz. van de transiënte toestanden en noteer de stationaire matrix met P^*.
Bewijs de volgende bewering:

$$x_i = \begin{cases} 0 & \textit{als}\ \ i \in T \\ c_k p^*_{ii} & \textit{als}\ \ i \in R_k,\ \textit{met}\ c_k \geq 0,\ 1 \leq k \leq m, \textit{en}\ \sum_{k=1}^m\ c_k = 1. \end{cases}$$

Deel 2: Opgaven

Opgave 4: Voortbrengende functies

Zij $f(x)$ de voortbrengende functie van de 'verschoven' Fibonacci-getallen a_n met $a_0 = 1,\ a_1 = 1$ en $a_n = a_{n-1} + a_{n-2},\ n \geq 2$.

a. Toon aan dat $(1 - x - x^2)f(x) = 1$.

b. Leid hiermee af dat $a_n = \sum_{i=0}^{\frac{n}{2}} \binom{n-i}{i}$ voor $n \geq 0$.

   Aanwijzing:

   Schrijf $(1 - x - x^2)^{-1}$ als $\{1 - (x + x^2)\}^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} (x + x^2)^k$ en werk dit verder uit.

Opgave 5: Simplex methode

a. Los het volgende LP-probleem op:

$$max \left\{ -4x_1 - 2x_2 - 3x_3 \;\middle|\; \begin{array}{ccccccc} x_1 & - & x_2 & + & x_3 & \leq 4; & x_1 \geq 0 \\ x_1 & + & x_2 & - & x_3 & = 1; & x_2 \geq 0 \\ x_1 & - & x_2 & + & x_3 & \geq 2; & x_3 \geq 0 \end{array} \right\}.$$

b. Formuleer het duale probleem en geef ook daarvan een optimale oplossing.

Opgave 6: Markov ketens

Beschouw de irreducibele Markov keten op $\mathbb{N}_0$ met $p_{ij} = \begin{cases} \frac{1}{i+2} & \text{als } 0 \leq j \leq i+1 \\ 0 & \text{als } j > i+1 \end{cases},\ i \in \mathbb{N}_0$.

a. Toon aan dat voor de stationaire kansverdeling π van deze keten geldt: $\pi_i = \frac{1}{i!}\pi_0,\ i \in \mathbb{N}_0$.

b. Bepaal de stationaire kansverdeling $\pi_i,\ i \in \mathbb{N}_0$.