Tentamen WI2608 Optimalisering (Delft) en Besliskunde 1 (Leiden)

16 januari 2012, 14.00 - 17.00 uur

Het tentamen bestaat uit zes opgaven. Laat bij elk antwoord duidelijk zien hoe je eraan bent gekomen. Bij elke opgave staat het bijbehorende aantal punten. Het uiteindelijke cijfer krijg je door het totaal aantal punten door zes te delen.

Het gebruik van een laptop is niet toegestaan. Het gebruik van een rekenmachine is wel toegestaan. Veel succes!

---

1. Een bedrijf met M medewerkers moet N orders verwerken. Iedere medewerker kan slechts aan één order tegelijk werken, en iedere order wordt door precies één medewerker afgehandeld. Order j vergt een afhandelingstijd van t_j minuten ($j = 1, \ldots, N$). Het doel is de totale tijd om de N orders te verwerken te minimaliseren. Je mag aannemen dat de medewerkers geen pauze nemen, en dat alle orders bij het begin van de planningsperiode beschikbaar zijn.

   Voor deze situatie gaan we een lineair geheeltallig programmeringsmodel opstellen.

   (a) (3 punten) Definieer de beslissingsvariabelen. Welke waarden kunnen deze aannemen?

   (b) (2 punten) Stel een formule op voor het berekenen van de totale werktijd van medewerker i ($i = 1, \ldots, M$).

   (c) (7 punten) Maak een lineair geheeltallig programmeringsmodel voor het probleem, waarbij de totale tijd om de N orders te verwerken geminimaliseerd wordt. De oplossing moet weergeven welke opdrachten door welke medewerker wordt verwerkt, maar niet de volgorde waarin ze verwerkt worden. De oplossing moet ook weergeven wanneer de laatste medewerker klaar is. Voeg voor elke voorwaarde een korte beschrijving van de voorwaarde toe.
   Hint: definieer een extra variabele voor de te minimaliseren totale werktijd.

2. (a) (5 punten) Bepaal voor onderstaand probleem een toegelaten basisoplossing met behulp van het simplexalgoritme.

$$
\begin{array}{llcccccl}
\max z = & 2x_1 & - & x_2 & - & 2x_3 & & \\
\\
\text{odv} & 4x_1 & + & 4x_2 & - & x_3 & \leq & 70 \\
 & x_1 & + & x_2 & - & x_3 & = & 10 \\
 & x_1 & + & x_2 & & & \geq & 16 \\
\\
 & x_1, & & x_2, & & x_3 & \geq & 0
\end{array}
$$

(b) Gegeven is het volgende lineaire optimaliseringsprobleem:

$$\begin{array}{lrcrcrcl}
\max z = & x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & & \\
 & & & & & & & \\
\text{odv} & x_1 & + & x_2 & + & x_3 & \leq & 10 \\
 & & & x_2 & - & 3x_3 & \leq & 7 \\
 & -x_1 & + & x_2 & + & x_3 & \leq & 2 \\
 & & & & & & & \\
 & x_1, & & x_2, & & x_3 & \geq & 0,
\end{array}$$

met bijbehorende optimale oplossing $(x^*)^T = [4,\ 6,\ 0]$, en optimale doelfunctiewaarde $z^* = 16$.

(i) (4 punten) Formuleer het bijbehorende duale probleem.

(ii) (3 punten) Bepaal met behulp van Complementary Slackness de optimale oplossing (incl. de optimale doelfunctiewaarde) van het duale probleem.

3. Gegeven is het primale probleem

$$(\text{P}):\ \max z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j,\ \text{odv} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i,\ i = 1, \ldots, m,\ x \geq 0,$$

en het bijbehorende duale probleem:

$$(\text{D}):\ \min w = \sum_{i=1}^{m} b_i y_i,\ \text{odv} \sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \geq c_j,\ j = 1, \ldots, n,\ y \geq 0,$$

Zij $\hat{x}$ een toegelaten primale oplossing en $\hat{y}$ een toegelaten duale oplossing.

(a) (5 punten) Bewijs dat $\sum_{j=1}^{n} c_j \hat{x}_j \leq \sum_{i=1}^{m} b_i \hat{y}_i$.

(b) (5 punten) Geef antwoord "waar" of "niet waar" op de volgende vragen. (Geen toelichting nodig.)

(i) Als met een toegelaten basisoplossing x meer dan één basis correspondeert, dan is x gedegenereerd.

(ii) In het primaal-duale algoritme is in elke iteratie een primaal toegelaten oplossing bekend, en termineert (stopt) het algoritme zodra er aan de complementary slacknessvoorwaarden zijn voldaan.

(iii) Als een primaal probleem niet-toegelaten is, is het bijbehorende duale probleem ook niet-toegelaten.

(iv) Zij $f(n) = 2n^2 + 3n + 4$. $f(n) = O(n^2)$.

(v) Zij $P = \{x \mid Ax = b,\ x \geq 0\}$. Als A een totaal unimodulaire matrix is, dan zijn alle hoekpunten van P geheeltallig voor iedere geheeltallige vector b.

4. (a) (3 punten) Geef de definitie van de complexiteitsklassen P, NP en NP-volledig.
   (b) (7 punten) Bewijs dat de beslissingsversie (ja/nee-versie) van 0-1 geheeltallige programmering NP-volledig is. Dit probleem wordt als volgt gedefinieerd:
   Gegeven is een geheeltallige $m \times n$ *matrix* A *en een geheeltallige* m*-vector* b*. Bestaat er een vector* $x \in \{0,1\}^n$ *zodanig dat* $Ax = b$*?*
   In het bewijs mag je gebruik maken van de kennis dat het Satisfiability probleem (SAT) NP-volledig is.

5. (8 punten) Bepaal, met behulp van Dijkstra's algoritme het kortste pad van s naar t in de volgende graaf:

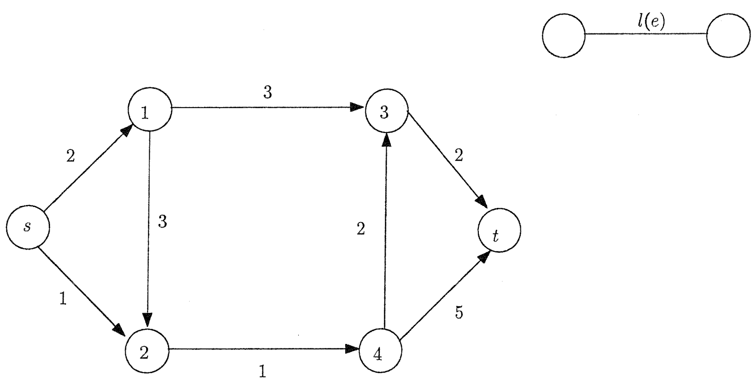

Figure 1:

Laat duidelijk zien wat in elke iteratie gebeurt.

6. (a) (6 punten) Stel dat je een geheeltallig minimaliseringsprobleem oplost met behulp van Branch-and-Bound en dat je in knoop j van de zoekboom bent. Wanneer mag je concluderen dat je niet verder hoeft te zoeken direct onder knoop j?
   (b) (2 punten) Wat is het maximum aantal knopen van een Branch-and-Bound boom als alle variabelen waarden hebben in $\{0,1\}$?