Tentamen Besliskunde 2 (8 januari 2009, 14.00 - 17.00 uur)

Deel 1: Theorie

Opgave 1
Bewijs de volgende stelling:
Het combinatorisch optimaliseringsprobleem behoort tot de complexiteitsklasse $\mathcal{NPC}$.

Opgave 2
Bewijs de volgende stelling.
Zij $f(x)$ continu differentieerbaar en laat x^* een lokaal optimum van $f(x)$ zijn. Dan geldt:

(1) $\nabla f(x^*) = 0$.

(2) Als f bovendien tweemaal continu differentieerbaar is, dan is $\nabla^2 f(x^*)$ negatief (positief) semi-definiet als x^* een maximum (minimum) is.

Opgave 3
Beschouw een schedulingsprobleem op m parallelle machines, d.w.z. dat een taak op iedere machine dezelfde bewerkingstijd heeft, zeg p_j voor taak j.

a. Bewijs dat voor iedere lijst-heuristiek $LIST$ geldt: $\frac{C_{max}(LIST)}{C_{max}(OPT)} \leq 2 - \frac{1}{m}$.

b. Geef voor willekeurige m de bewerkingstijden p_j van $2m - 1$ taken en een lijst $LIST$ zdd. $C_{max}(LIST) = 2m - 1$ en $C_{max}(OPT) = m$, waaruit volgt dat de grens uit a scherp is.

Deel 2: Opgaven

Opgave 4
Beschouw het volgende LP-probleem:

$$max \left\{ -4x_1 - 2x_2 - 3x_3 \;\middle|\; \begin{array}{ccccccc} x_1 & - & x_2 & + & x_3 & \leq & 4; \\ x_1 & + & x_2 & - & x_3 & = & 1; \\ x_1 & - & x_2 & + & x_3 & \geq & 2; \end{array} \begin{array}{c} x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \\ x_3 \geq 0 \end{array} \right\}.$$

a. Bepaal een optimale oplossing met de simplex methode.

b. Wat is de optimale oplossing als een variabele x_4 wordt toegvoegd met in de doelfunctie de coëfficiënt -1 en in de drie beperkingen resp. de coëfficiënten -2, 0 en 1.
Beantwoord deze vraag zonder het nieuwe probleem van vooraf aan op te lossen, maar vanuit het in onderdeel a verkregen optimale tableau.

Opgave 5

Beschouw het niet-lineaire probleem $max\ \{x_1 \mid x_2 - (1-x_1)^3 \leq 0;\ x_1, x_2 \geq 0\}$.

a. Bepaal de optimale oplossing x^* van dit probleem.

b. Laat zien dat x^* niet aan de KKT-voorwaarden voldoet.

Opgave 6

Zij N een netwerk met capaciteiten $b_j,\ j = 1, 2, \ldots, m$ (we nummeren de pijlen $1, 2, \ldots, m$). Beschouw de $p \times m$ padenmatrix P van alle enkelvoudige paden van knooppunt v_1 naar knooppunt v_n. Om het maximale stroom probleem op te lossen 'proberen' we het LP-probleem

$$max \left\{ \sum_{i=1}^{p} x_i \;\middle|\; \begin{array}{rl} \sum_{i=1}^{p} p_{ij} x_i \leq b_j, & j = 1, 2, \ldots, m \\ x_i \geq 0, & i = 1, 2, \ldots, p \end{array} \right\}, \tag{1}$$

a. Formuleer voor het model uit Voorbeeld 4.7 dit LP-probleem en het bijbehorende duale probleem.

b. Verklaar de algemene formulering (1) van dit maximaliseringsprobleem.

c. Geef een interpretatie van het duale probleem, als we aannemen dat daarin de variabelen de waarden 0 of 1 hebben.

d. Is ieder optimaal hoekpunt van (1) altijd geheeltallig? Verklaar uw antwoord.