Universiteit Leiden
Tentamen Besliskunde A - Stochastische Besliskunde
23 januari 2017, 14:00-17:00

Naast een pen is bij dit tentamen een enkel vel a4-papier toegestaan, dat aan beide kanten beschreven mag zijn met uw handgeschreven (dus geen digitale) aantekeningen. Andere hulpmiddelen (bijv. dictaten, rekenmachines) worden niet toegelaten.

Het aantal punten dat u voor elke deelvraag kunt verdienen staat tussen vierkante haken aangegeven. Het aantal punten dat u behaald heeft zal na deling door het totale aantal te behalen punten en vermenigvuldiging met het getal 10 uw tentamencijfer vormen.

Veel succes!

[8] **Opgave 1**

Geef bij elk van de volgende uitspraken aan of deze waar is of niet waar. Beargumenteer bij elke uitspraak **kort** uw antwoord. (Uw antwoord wordt enkel goedgekeurd bij een correcte beargumentatie.)

a) [2 pt.] Twee communicerende toestanden in een discrete-tijd Markov keten hebben ofwel *allebei* een *eindige* verwachte terugkeertijd, ofwel *allebei* een *oneindige* verwachte terugkeertijd.

b) [2 pt.] Laat $\{N_1(t), t \geq 0\}$ en $\{N_2(t), t \geq 0\}$ vernieuwingsprocessen zijn, en laat $N(t) = N_1(t) + N_2(t)$. Dan is $\{N(t), t \geq 0\}$ ook een vernieuwingsproces.

c) [2 pt.] Laat $\{L(t), t \geq 0\}$ een continue-tijd Markov keten zijn die het aantal klanten in een M/M/∞ systeem beschrijft. Via uniformisatie kan $\mathbb{P}(L(t) = n \mid L(0) = 0)$ voor elke $t \geq 0$ en $n \in \mathbb{N}$ worden gevonden.

d) [2 pt.] De kans dat er in stationariteit op een arbitrair moment nul klanten aanwezig zijn in een M/M/1 systeem is gelijk aan de kans dat er in stationariteit op een arbitrair moment nul klanten aanwezig zijn in elk ander G/G/1 systeem met dezelfde verwachte tussenaankomsttijd en bedieningstijd als die van het voornoemde M/M/1 systeem.

[13] **Opgave 2**

Beschouw de discrete-tijd Markov keten (DTMK) $\{X_n, n \in \mathbb{N}\}$ met toestandsruimte $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ en de één-staps overgangsmatrix

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{4} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

U mag aannemen dat de indexverzameling $\mathbb{N}$ het element 0 bevat.

a) [3 pt.] Is deze DTMK irreducibel? Identificeer alle klassen van deze DTMK en geef van elk van de klassen aan of deze aperiodiek is, en of deze transiënt is.

b) [3 pt.] Wat is het verwachte aantal benodigde transities om vanuit toestand 3 toestand 6 te bereiken?

c) [2 pt.] Laat $T := \sup\{n \geq 0 : X_n = 3\}$. Is T een stoptijd voor $\{X_n, n \in \mathbb{N}\}$? Is $T + 1$ dat? Licht uw antwoorden toe.

d) [3 pt.] Bepaal $\mathbb{E}[z^T \mid X_0 = 3]$, ofwel de kansgenererende functie van T, gegeven dat de DTMK start in toestand 3.

e) [2 pt.] Bepaal de limietverdeling van deze DTMK.

[10]

Opgave 3

Beschouw een productiemachine en zijn buffer in een fabriek. Producten dienen zich aan bij de buffer van de machine volgens een Poisson proces met parameter λ. De buffer bevat plek voor $N-1$ wachtende producten. Aankomende producten die de buffer vol treffen, gaan verloren. De bewerkingstijd B van een product is exponentieel verdeeld met parameter μ. De bewerkingstijden van verschillende producten zijn onderling onafhankelijk, en producten worden bediend volgens het FIFO/FCFS-principe. Als een product aan de beurt is, zal de machine het product bewerken indien bij aanvang van bewerking blijkt dat de benodigde bewerkingstijd groter is dan 1. Als bij aanvang van de bewerking de benodigde bewerkingstijd kleiner dan 1 blijkt te zijn, stuurt de machine het product direct door naar een andere machine (wat een verwaarloosbare tijd kost). De machine gaat dan direct verder met het volgende product indien er een wachtend product is.

a) [2 pt.] Stel dat $N = 2$. Modelleer het aantal producten bij de productiemachine (wachtend in de buffer + in bewerking) als een continue-tijd Markov keten. Geef de bijbehorende toestandsruimte en de generatormatrix.

b) [3 pt.] Als $N = 2$, wat is de kans dat er zich in stationariteit nul producten in het systeem bevinden?

Neemt u voor de rest van de opgave aan dat $N = \infty$.

c) [2pt.] Indien het systeem *stabiel* is, hoeveel keer per tijdseenheid stuurt de machine naar verwachting op de lange termijn een product door naar een andere machine?

d) [3pt.] Indien het systeem *instabiel* is, hoeveel keer per tijdseenheid stuurt de machine naar verwachting op de lange termijn een product door naar een andere machine?

[11]

Opgave 4

Klanten komen aan bij een tabakswinkel volgens een Poisson proces met een intensiteit van λ per uur. Naar verwachting koopt een kwart van de klanten een lot; de bedieningstijd die deze klanten nodig hebben is exponentieel verdeeld met verwachting b_l. Alle andere klanten komen voor hun favoriete tabaksproduct; hun bedieningstijd is exponentieel verdeeld met verwachting b_t. Alle bedieningstijden zijn onderling onafhankelijk. Er is slechts een enkele bediende aanwezig, die de klanten in de volgorde van aankomst bedient.

a) [4 pt.] Gebruik PASTA en de stelling van Little om via een mean-value analyse een uitdrukking voor de verwachte wachttijd van een klant te verkrijgen, in termen van λ, b_l en b_t.

b) [2 pt.] Hoeveel klanten zal de bediende naar verwachting bedienen tijdens een 'busy period'? Geef een uitdrukking hiervoor.

c) [2 pt.] Wat is de kans dat, nadat de bediende zojuist een bediening heeft afgerond, er geen klanten in de winkel meer zijn?

d) [3 pt.] Als we dit systeem wensen te simuleren, dienen we gesimuleerde waarden voor de bedieningstijden van klanten te verkrijgen. Stel dat u willekeurige trekkingen uit de standaard-uniforme verdeling ter beschikking heeft. Beschrijf hoe u met behulp van deze trekkingen gesimuleerde waarden voor de bedieningstijden kunt verkrijgen. Let op: u wordt gevraagd om uw uitleg op dit specifieke geval te betrekken en uit te werken.