Universiteit Leiden
Tentamen Besliskunde A - Stochastische Besliskunde
25 januari 2018, 14:00-17:00

Naast een pen is bij dit tentamen toegestaan:

- een enkel vel a4-papier dat aan beide kanten ofwel met de hand beschreven is, ofwel getypt in minimaal font 9.
- een niet-programmeerbare rekenmachine.

Het aantal punten dat u voor elke deelvraag kunt verdienen staat tussen vierkante haken aangegeven. Het aantal punten dat u behaald heeft zal na deling door het totale aantal te behalen punten en vermenigvuldiging met het getal 10 uw tentamencijfer vormen.

Let op dat een a,b,c, of d onderdeel van een opgave meerdere vragen kan bevatten!!

Veel succes!

Opgave 1

Geef bij elk van de volgende uitspraken aan of deze waar is of niet waar.

a) [1,5 pt.] De toestanden van een irreducibele discrete-tijd Markov keten met een eindige toestandsruimte zijn altijd positief recurrent.

b) [1,5 pt.] Laat $\{N(t), t \geq 0\}$ een vernieuwingsproces zijn. Elke vernieuwing/gebeurtenis van dit proces blijkt, onderling onafhankelijk, met kans p een belangrijke gebeurtenis te representeren. Als $M(t)$ het aantal van zulke belangrijke gebeurtenissen tot tijdstip t is, dan is $\{M(t), t \geq 0\}$ een vernieuwingsproces.

c) [1,5 pt.] Een Poisson proces is een reversibel Markov proces.

d) [1,5 pt.] De kans dat een aankomende klant in stationariteit nul klanten aantreft in een M/M/1 systeem is gelijk aan de kans dat een aankomende klant in stationariteit nul klanten aantreft in elk ander M/G/1 systeem, mits dit systeem dezelfde verwachte tussenaankomsttijd en bedieningstijd heeft als die van het voornoemde M/M/1 systeem.

Opgave 2

Veronderstel dat een vlo op ieder tijdstip $n = 0, 1, \ldots$ in één van de acht hoekpunten van een kubus zit. Op ieder tijdstip maakt de vlo een sprong. Met gelijke kansen $p/3$ zal de vlo naar één van de drie aangrenzende hoekpunten springen. Met kans $1 - p$ maakt de vlo een sprongetje in de lucht, maar belandt hij weer in hetzelfde hoekpunt. Noemen we het hoekpunt waar de vlo op tijdstip n zit X_n, dan is $\{X_n, n \in \mathbb{N}\}$ een discrete-tijd Markov keten.

a) [3 pt.] Voor welke waarde(s) van p is deze Markov keten irreducibel? Voor welke waarde(s) van p zijn er toestanden met periode ongelijk aan 1?

b) [2 pt.] In het geval $p > 0$, laat zien dat de Markovketen reversibel is en bepaal de unieke stationaire kansverdeling van deze keten.

Laat 1 het hoekpunt zijn waar de vlo zich nu bevindt. Met 8 duiden we het hoekpunt 'tegenover' 1 aan, ofwel het enige hoekpunt waarvoor minstens 3 sprongen nodig zijn om vanuit 1 te bereiken. Gaat u in opgaven c) en d) er vanuit dat $p > 0$.

c) [2 pt.] Wat is naar verwachting het aantal sprongen dat de vlo nodig heeft om in hoekpunt 1 terug te keren?

d) [3 pt.] Wat is de kans dat de vlo hoekpunt 8 aandoet voordat het in hoekpunt 1 terugkeert? *Hint: u kunt het rekenwerk beperken door een handige Markovketen met toestanden* $1, a, b, 8$ *te definiëren!...*

Opgave 3
Voor het plannen van taken in een computersysteem wordt onderscheid gemaakt tussen I-taken (interactieve taken) en NI-taken (niet-interactieve taken, bijv. een programma dat langdurig runt). Taken kunnen niet simultaan worden uitgevoerd. Zodra een taak is afgerond wordt onmiddellijk aan een I-taak begonnen. Als er geen I-taak is, dan wordt een NI-taak uitgevoerd. Wanneer tijdens de uitvoer van een NI-taak een nieuwe I-taak aankomt, dan wordt de uitvoering van de NI-taak *opgeschort* tot er geen I-taak meer aanwezig is. Als er geen I-taken meer zijn, wordt de uitvoer van de reeds gestarte NI-taak voortgezet.

Als er taken aanwezig zijn in het computersysteem, dan wordt er altijd aan een taak gewerkt.

I-taken komen aan volgens een Poisson proces met parameter λ_I, en vereisen een exponentieel μ_I verdeelde hoeveelheid werk. Onafhankelijk hiervan, komen de NI-taken aan volgens een Poisson proces met parameter λ_{NI} en deze vereisen een exponentieel μ_{NI} verdeelde hoeveelheid werk. Laat $\lambda_I/\mu_I + \lambda_{NI}/\mu_{NI} < 1$. We nemen ook aan dat elk van de processen hieronder in de stationaire situatie verkeren, en zullen dat in de volgende onderdelen niet steeds expliciet vermelden.

a) [2 pt.] Modelleer het aantal I-taken in het computersysteem als een Markov proces. Bepaal de verwachting L_I van het aantal I-taken in het computersysteem. Bepaal de fractie van de tijd dat er gewerkt wordt aan een I-taak.

b) [3 pt.] We willen nu de fractie van de tijd berekenen dat aan een NI- taak wordt gewerkt. Op grond van het vorige onderdeel is het voldoende om te berekenen wat de fractie van de tijd is dat aan taken (I en NI) wordt gewerkt.

   Beargumenteer dat deze laatste fractie dezelfde is als die in een M/G/1-wachtrij met aankomstproces een Poisson proces met parameter $\lambda_I + \lambda_{NI}$, en geschikt gekozen bedieningsduur. Specificeer deze bedieningsduur. Concludeer hieruit wat de fractie van de tijd is dat aan een niet-interactieve taak wordt gewerkt.

Veronderstel nu dat $\mu_I = \mu_{NI} = \mu$, d.w.z. beide type taken vereisen een exponentieel μ verdeelde hoeveelheid werk.

c) [3 pt.] Modelleer nu het *totaal* aantal taken in het systeem als een Markov proces en bereken hiermee de verwachting L van het totale aantal taken in het computersysteem. Bereken hieruit het verwachte aantal NI-taken L_{NI} in het computersysteem. Bereken tenslotte de verwachte verblijftijd van I-taken en die van NI-taken in het computersysteem.

d) [3 pt.] Wat is de verdeling van een aaneengesloten periode dat in het computersysteem geen taak aanwezig is? Wat is de verwachte duur van een aaneengesloten periode dat er taken in het computersysteem zijn? *(Hint: vernieuwingstheorie!)*

Opgave 4
Individuele wespen van het geslacht Zyzzyx worden op discrete tijdstippen geobserveerd. Dit geslacht bestaat uit $N < \infty$ soorten. Bij elke observatie wordt met kans $p_j > 0$, $j \in \{1, \ldots, N\}$, een Zyzzyx wesp van soort j geobserveerd (per observatie dus één soort van de Zyzzyx wesp). Elke observatie kost $C > 0$. Als er besloten wordt met de observaties te stoppen, geeft dat een opbrengst R_n, met n het aantal verschillende geobserveerde soorten Zyzzyx wespen. Gevraagd is een stopstrategie met maximale totale verwachte opbrengst.

a) [3 pt.] Modelleer het probleem als een optimaal stopprobleem (d.w.z. specificeer toestandsruimte, actieruimtes, directe opbrengsten en overgangskansen). *Hint: het aantal toestanden is* $2^N + 1$.

b) [3 pt.] Neem aan dat $R_{n+2} - R_{n+1} \leq R_{n+1} - R_n$, $n = 1, \ldots, N-2$. Is het optimale stopprobleem dan monotoon? Specificeer de optimale stopstrategie.