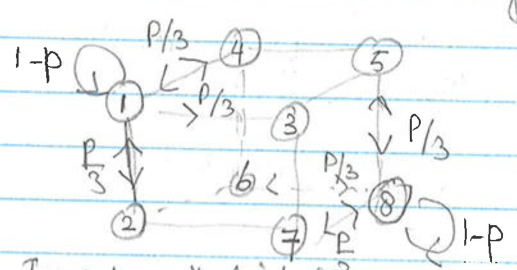
Uitwerking tentamen 25-I-2018 BKA

1 a) waar
b) waar
c) niet waar
d) waar

2 a) we schetsen de geassocieerde graaf (gedeeltelijk)



Irreducibiliteit

$p=0$: elke toestand is absorberend, dus de keten heeft 8 gesloten klassen

$p>0$: de vlo kan p met positieve kans de ribben van de kubus 2 kanten op springen dus de MK is irreducibel

Periode

$p<1$: periode $=1$ voor alle toestanden $d(i)=1$ $\forall i$, omdat de vlo met positieve kans naar een toestand kan terugspringen

$p=1$: terugspringkansen zijn 0

[MK is irreducibel dus we hoeven slechts de periode van 1 toestand te bepalen – NIET NODIG]

- In 2 sprongen kan vlo naar een toestand terugkeren $\Rightarrow d(i) \leq 2$ $\forall i$
- Vlo kan slechts in even aantal sprongen terugkeren

$\Rightarrow d(i)=2$ $\forall i$

Dus: $p=1$ is enige waarde waarvoor $d(i) \neq 1$ $\forall i$

b). Reversibiliteit kunnen we nagaan door het rondjes criterium.
Beschouw een willekeurige ronde in de geassocieerde graaf, zonder lussen, zeg met n pijlen. Dan is het product van de overgangskansen $(\frac{p}{3})^n$. Maar met elke pijl correspondeert een tegenstelde pijl, met kans $\frac{p}{3}$.
Dus het product de ronde de andere kant op is ook $(\frac{p}{3})^n$.
Als een ronde een lus bevat, dan wordt deze in tegengestelde ook doorlopen. Dat geeft geen extra problemen.

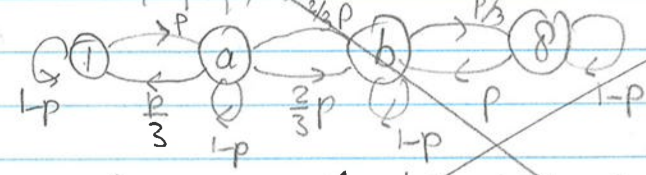
Stat. verdeling : $P_2 = \frac{p/3}{p/3} P_1 = P_1$ enz.

dus $\left.\begin{array}{l} P_1 = \dots = P_8 \\ \sum_{i=1}^{\infty} P_i = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow P_i = \frac{1}{8} \quad \forall i$

c) $E(\text{verw. \# sprongen}) = \mu_{11} = \frac{1}{P_1} = 8$

d)

$a \sim \{2,3,4\}$ "afstand 1" tot 1
$b \sim \{5,6,7\}$ " 2 " tot 1



2 manieren (i) kansen naar 1 weglaten en de kans op bereiken van 8 berekenen
(ii) kans berekenen dat niet in 8 komt voor terug in 1 door overgangen naar 8 weg te laten.

! We doen (i) en stellen een lineair stelsel op
laat $g_i = \mathbb{P}(\text{MK bereikt 8 voor 1} \mid X_0 = i)$

Dan
$$\begin{cases} g_1 = p\, g_a \\ g_a = (1-p)\, g_a + \frac{2p}{3} g_b \\ g_b = (1-p)\, g_b + \frac{2p}{3} g_a + \frac{p}{3} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} g_1 = p\, g_a \\ g_a = \frac{2}{3} g_b \\ g_b = \frac{2}{3} g_a + \frac{1}{3} \end{cases}$$

($p g_a$, $p g_b$ naar links en door p delen)

$$\Rightarrow \begin{cases} g_1 = p\, g_a \\ g_b = \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} g_b + \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{5}{9} g_b = \frac{1}{3} \Rightarrow g_b = \frac{3}{5} \\ g_a = \frac{2}{3} g_b \end{cases}$$

$$\Rightarrow g_a = \frac{2}{5} \Rightarrow \boxed{g_1 = \frac{2}{5} p}$$

3 a) I-taken ~ de uitvoer van I-taken hangt niet af van die van NI-taken. Dus het aantal I-taken kan gemodelleerd worden met een M|M|1-rij met Poisson(λ_I)-aankomsten ~~en~~ en exp(μ_I)-verdeelde bedieningsduren $\Rightarrow$ $L_I = \frac{\lambda_I/\mu_I}{1-\lambda_I/\mu_I} = \frac{\lambda_I}{\mu_I - \lambda_I}$

b) De gevraagde fractie is $1 - P_0 = \frac{\lambda_I}{\mu_I}$, ($P_0$ is stat. kans op 0 I-taken)

b) M|G|1 $\rightarrow$ · Poisson ($\lambda_I + \lambda_{NI}$) aankomsten
· Bedieningsduur – exp(μ_I) met kans $\lambda_I / \lambda_I + \lambda_{NI}$
exp(μ_{II}) met kans $\frac{\lambda_{NI}}{\lambda_I + \lambda_{NI}}$

Verwachte bedieningsduur is $\frac{\lambda_I}{\lambda_I+\lambda_{NI}} \cdot \frac{1}{\mu_I} + \frac{\lambda_{NI}}{(\lambda_I+\lambda_{NI})\mu_{NI}}$

Idee is
- onafh. som van $PP(\lambda_I)$ en $PP(\lambda_{NI})$ is $PP(\lambda_I+\lambda_{NI})$
- taken worden in volgorde van binnenkomst uitgevoerd. Pas bij uitvoering wordt gereconstrueerd wat het type was I of NI

Oorspronkelijke en het M/G/1 systeem zijn even vaak "leeg", dus de stat. kansen op 0 zijn gelijk (volgorde van behandeling doet er niet toe)

Dus fractie vd tijd dat leeg is

$$1-(\lambda_I+\lambda_{NI})\left\{\frac{\lambda_I}{\mu_I(\lambda_I+\lambda_{NI})}+\frac{\lambda_{NI}}{(\lambda_I+\lambda_{NI})\mu_{NI}}\right\}$$

$$=1-\frac{\lambda_I}{\mu_I}-\frac{\lambda_{NI}}{\mu_{NI}}$$

Dus fractie vd tijd dat bediende werkt is

$$\underbrace{\frac{\lambda_I}{\mu_I}}_{\text{fractie vd tijd dat bediende aan I werkt}} + \frac{\lambda_{NI}}{\mu_{NI}}$$

dus $\frac{\lambda_{NI}}{\mu_{NI}}$ is fractie vd tijd dat aan NI werkt

---

Nu $\mu_I=\mu_{NI}=\mu$

c) De "G" uit b is nu met kans $\frac{\lambda_I}{\lambda_I+\lambda_{NI}}$ een exp(μ) en met kans $\frac{\lambda_{NI}}{\lambda_I+\lambda_{NI}}$ een exp(μ) dus een exp(μ) verdeling

Daarmee is het M.proces een M|M|1 -rij met Poisson($\lambda_I+\lambda_{NI}$) - aankomsten en een exp(μ) verdeling

$$\Rightarrow L = \frac{\lambda_I+\lambda_{NI}}{\mu-\lambda_I-\lambda_{NI}}$$

Verder: $L = L_I + L_{NI} \Rightarrow L_{NI} = L - L_I$

$$= \frac{\lambda_I+\lambda_{NI}}{\mu-\lambda_I-\lambda_{NI}} - \frac{\lambda_I}{\mu-\lambda_I} = \ldots$$

Voor verwachte verblijftijd gebruiken we Little

$$W_I = \lambda_I L_I$$
$$W_{NI} = \lambda_{NI} L_{NI}$$

d) • Tijdsduur tot klant in leeg systeem binnenkomt is $\frac{1}{\lambda_I+\lambda_{NI}}$

• Vernieuwing theorie toepassen.
Laat B = verw. aaneengesloten duur dat er taken zijn !!

Dan
$$\underbrace{P_0}_{\text{stat kans op leeg systeem in model uit (c)}} = \frac{\frac{1}{\lambda_I+\lambda_{NI}}}{\frac{1}{\lambda_I+\lambda_{NI}} + B}$$

hieruit is B op te lossen

$$= 1 - \frac{\lambda_I+\lambda_{NI}}{\mu}$$ (zie b) of direct uit (c))

als student daarmee aan toekomt hoeft dat niet erg fout gerekend te word

$$\Rightarrow \frac{\mu-\lambda_I-\lambda_{NI}}{\mu} = \frac{1}{1+(\lambda_I+\lambda_{NI})B}$$

$$\Rightarrow [\mu-(\lambda_I+\lambda_{NI})](1+(\lambda_I+\lambda_{NI})B) = \mu$$

$$\Rightarrow \cancel{(\lambda_I+\lambda_{NI})}(\mu-\lambda_I-\lambda_{NI})B = \cancel{(\lambda_I+\lambda_{NI})}$$

$$\Rightarrow B = \frac{1}{\mu-\lambda_I-\lambda_{NI}}$$

lege verzameling kan ook, daar start je mee $\quad 1,2 \quad 1,2,\ 1,2$

4) a) $S = \{ V \mid V \subset \{1, \dots, N\} \} \cup \Delta$

$A(V) = \{ \underset{\text{stop}}{0}, \underset{\text{ga door}}{1} \}$

$P_{VW}(1) = \begin{cases} p_j & W = V \cup \{j\},\ j \notin V \\ \sum_{j \in V} p_j & W = V \neq \emptyset \end{cases}$

$r_V = R_{|V|}$
$c_V = C$

b) Voor monotonie bepalen we $S_0 \subset S \setminus \Delta$ met

$V \in S_0 \iff r_V \geq -C + \sum_W P_{VW}(1)\, r_W$

Er geldt $r_V \geq -C + \sum_W P_{VW}(1)\, r_W$

$\iff R_{|V|} \geq -C + \sum_{j \notin V} p_j R_{|V+1|} + \sum_{j \in V} p_j R_{|V|}$

$\iff C \geq \sum_{j \notin V} p_j R_{|V+1|} - \sum_{j \notin V} p_j R_{|V|}$

$= \sum_{j \notin V} p_j \left(R_{|V+1|} - R_{|V|} \right)$

Dus $S_0 = \{ V \mid C \geq \sum_{j \notin V} p_j (R_{|V+1|} - R_{|V|}) \}$

Het stopprobleem is monotoon als $V \in S_0 \Rightarrow V \cup \{j\} \in S_0,\ j \notin V$

dus als $C \geq \sum_{j \notin V} p_j (R_{|V+1|} - R_{|V|}) \Rightarrow C \geq \sum_{j \notin V \cup \{k\}} p_j (R_{|V+2|} - R_{|V+1|})$ $\forall k \notin V$ met ~~...~~

Verschillende gevallen:

- $R_{|V+2|} - R_{|V+1|} \leq 0$ dan triviaal waar

- $R_{|V+2|} - R_{|V+1|} > 0 \Rightarrow R_{|V+1|} - R_{|V|} \geq R_{|V+2|} - R_{|V+1|} > 0$

$C \geq \sum_{j \notin V} p_j (R_{|V+1|} - R_{|V|}) \geq \sum_{j \notin V \cup \{k\}} p_j (R_{|V+1|} - R_{|V|})$

$\geq \sum_{j \notin V \cup \{k\}} p_j (R_{|V+2|} - R_{|V+1|})$