

# Tentamen Caleidoscoop

18 december 2015 14.00-17.00 uur

## Opgave 1

Bepaal voor welke reële getallen  $x \in \mathbb{R}$  de volgende bewering waar is:

$$\neg[x \leq 17 \Leftrightarrow x^2 > 1].$$

## Opgave 2

- Bewijs *met volledige inductie* dat het aantal takken van de volledige graaf  $K_n$  gelijk is aan  $\frac{1}{2}n(n-1)$ .
- Voor welke  $b \in \mathbb{R}$  en  $n \in \mathbb{Z}$  geldt:  $(\frac{1}{2} + bi)^n = -1$ ?
- Beschouw de rationale rij  $\{a_i\}$ , met  $a_i = (-1)^i$ . Bewijs m.b.v. de definitie van een Cauchy-rij dat deze rij niét Cauchy is.
- Geef een beschrijving van alle samenhangende enkelvoudige vlakke grafen die evenveel takken als knopen hebben. Hint: determineer eerst hoeveel knopen deze grafen kunnen hebben.

## Opgave 3

Zij  $\sim$  een reflexieve relatie op een verzameling  $X$  met de eigenschap:

$$[x \sim y \wedge x \sim z] \Rightarrow y \sim z.$$

Is deze relatie dan ook een equivalentierelatie? Zo ja, bewijs het. Zo nee, geef een tegenvoorbeeld.

## Opgave 4

- Formuleer het Lemma van Zorn.
- Zij  $X$  een willekeurige verzameling. Beschouw de verzameling:

$$Y := \{f \mid f : X \rightarrow \{0, 1\}\}$$

van afbeeldingen van  $X$  naar de verzameling  $\{0, 1\}$ . Is  $X$  gelijkmachtig met  $Y$ ? Hint: geef óf een bijectie van  $Y$  naar  $X$  óf een bijectie van  $Y$  naar een verzameling  $Z \not\sim X$ .