Hertentamen Inleiding Kansrekening

4 juli 2016, 14:00–17:00

Docent: Prof. dr. F. den Hollander

Bij dit hertentamen is het gebruik van boek en aantekeningen niet toegestaan. Er zijn 8 vragen. Elke vraag is een aantal punten waard, dat vetgedrukt is aangegeven. Het totaal aantal punten is 100. Er zijn vragen in drie categorieën: **R** = reproductie, **T** = toepassing, **I** = inzicht.

Schrijf je naam, studentnummer en studierichting op elk blad dat je inlevert. Motiveer steeds je antwoorden: een los antwoord zonder uitleg is niet voldoende. Elke berekening dient van een toelichting te worden voorzien.

---

(1) [**R**]

  (a) [**5**] Waar moet een gebeurtenis A aan voldoen opdat die onafhankelijk van zichzelf is?

  (b) [**5**] Gegeven zijn twee gebeurtenissen A en B met $\mathbb{P}(A) = \frac{8}{9}$ en $\mathbb{P}(B) = \frac{2}{3}$. Geef de beste ondergrens voor $\mathbb{P}(A \cap B^c)$.

(2) [**T**] Zij X de $\mathbb{N}$-waardige stochast met kansmassafunctie

$$p_X(n) = \begin{cases} C, & 1 \leq n \leq N, \\ \frac{1}{2}C & N < n \leq 2N, \\ 0, & \text{elders.} \end{cases}$$

  (a) [**5**] Bereken C.

  (b) [**5**] Bereken $\mathbb{E}(X \mid X > N)$.

(3) [**T**] Zij X de $(0, \infty)$-waardige stochast met kansdichtheidsfunctie

$$f_X(x) = \begin{cases} Cx, & x \in (0, 10), \\ 0, & \text{elders.} \end{cases}$$

  (a) [**5**] Bereken C.

  (b) [**5**] Bereken de moment-genererende functie van X.

(4) **[T]** Zij (X, Y) het paar $(0, \infty)$-waardige stochasten met gezamenlijke kansdichtheidsfunctie

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} C|x^{-1} - y^{-1}|, & x, y \in [1,2], \\ 0, & \text{elders}, \end{cases}$$

waar $C^{-1} = 2(\log 2 - 1)$.

(a) [7] Bereken $f_Y(y)$.

(b) [8] Bereken $\mathbb{E}(X \mid Y = y)$.

(5) **[T]** Zij U de uniform verdeelde stochast op $[-2, 2]$.

(a) [7] Bereken de kansdichtheidsfunctie van de stochast $V = U^3$.

(b) [8] Bereken $\mathbb{E}(V \mid V > 0)$.

(6) **[R]** Zij $X = (X_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ de Markovketen met toestandsruimte $S = \{1, 2\}$, startverdeling $\lambda = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ en overgangsmatrix

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{8} & \frac{7}{8} \\ \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}.$$

(a) [7] Bereken $\mathbb{P}(X_2 = 1)$.

(b) [8] Bereken $\mathbb{P}(X_0 = 1 \mid X_2 = 1)$.

(7) **[R]** Zij $X = (X_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ de Markovketen met toestandsruimte $S = \{1, 2, 3\}$ en overgangsmatrix

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

(a) [5] Is X irreducibel? Is X aperiodiek?

(b) [5] Heeft X een unieke stationaire kansverdeling π? Zo ja, wat is die?

(8) **[I]** Zij $(X_i)_{i \in \mathbb{N}}$ een rij onafhankelijke, identiek verdeelde, $\mathbb{R}$-waardige stochasten met gemiddelde $\mu \in \mathbb{R}$ en variantie $\sigma^2 \in (0, \infty)$. Voor $n \in \mathbb{N}$, zij $\bar{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i$ het empirisch gemiddelde van de eerste n stochasten.

(a) [7] Hoe luidt de zwakke wet van de grote aantallen voor $\bar{X}_n$, $n \to \infty$?

(b) [8] Geef het bewijs van deze wet met behulp van de ongelijkheid van Chebyshev.