Tentamen Inleiding Kansrekening

9 juni 2016, 10:00–13:00

Docent: Prof. dr. F. den Hollander

Bij dit tentamen is het gebruik van boek en aantekeningen niet toegestaan. Er zijn 8 vragen, elk met 2 onderdelen. Elk onderdeel is een aantal punten waard, dat vetgedrukt is aangegeven. Het totaal aantal punten is 100. Er zijn vragen in drie categorieën: **R** = reproductie, **T** = toepassing, **I** = inzicht.

Schrijf je naam, studentnummer en studierichting op elk blad dat je inlevert. Motiveer steeds je antwoorden: een los antwoord zonder uitleg is niet voldoende. Elke berekening dient van een toelichting te worden voorzien.

---

(1) [**R**]

(a) [**7**] Laat zien, met behulp van een Venn-diagram, dat de kans dat *precies twee* van de gebeurtenissen A, B en C optreden gelijk is aan

$$\mathbb{P}(A^c) + \mathbb{P}(B^c) + \mathbb{P}(C^c) \\ - 2\mathbb{P}(A^c \cap B^c) - 2\mathbb{P}(A^c \cap C^c) - 2\mathbb{P}(B^c \cap C^c) + 3\mathbb{P}(A^c \cap B^c \cap C^c).$$

(b) [**8**] Laat zien dat als $\mathbb{P}(A) \in \{0, 1\}$, dan is A onafhankelijk van elke gebeurtenis B.

(2) [**R**] Op zaterdag en zondag doe ik boodschappen. Op zaterdag ga ik met kans $\frac{1}{3}$ naar Jumbo (J) en met kans $\frac{2}{3}$ naar Albert Heijn (AH). Gegeven dat ik op zaterdag naar J ga, kies ik zondag voor J met kans $\frac{1}{5}$ en voor AH met kans $\frac{4}{5}$. Gegeven echter dat ik zaterdag naar AH ga, kies ik op zondag voor AH met $\frac{1}{4}$ en voor J met kans $\frac{3}{4}$.

(a) [**7**] Bereken de kans dat ik op zondag naar J ga.

(b) [**8**] Bereken de kans dat ik op zaterdag naar AH ga, geven dat ik op zondag naar J ga.

(3) [T]

(a) [5] Zij X de discrete stochast met kansmassafunctie

$$p_X(k) = \begin{cases} C(\frac{1}{2})^k, & k = 11, 12, \dots, \\ 0, & \text{elders.} \end{cases}$$

Bereken de waarde van C. Wat is het domein van de moment-genererende functie van X?

(b) [5] Zij X de continue stochast met kansdichtheidsfunctie

$$f_X(x) = C|x| \exp(-x^2), \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Bereken de waarde van C. Wat is het domein van de moment-genererende functie van X?

(4) [T]

(a) [5] Zij X de continue stochast met cumulatieve kansverdelingsfunctie $F_X(x) = (1 - x^{-1})\, 1_{[1,\infty)}(x)$, $x \in \mathbb{R}$. Bereken de kansdichtheidsfunctie van de stochast $Y = 1/X$. Hoe heet de kansverdeling van Y?

(b) [5] Zij X, Y het paar discrete stochasten met gezamenlijke kansmassafunctie $p_{X,Y}(k,l) = 6\pi^{-2}(k + l + 1)^{-3}\, 1_{\mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0}(k,l)$, $k, l \in \mathbb{Z}$. Bereken de kansmassafunctie van $Z = X + Y$.

(5) [T] Zij (X, Y) het paar stochasten met gezamenlijke kansdichtheidsfunctie

$$f_{X,Y}(x,y) = 3\left[\max\{x,y\} - \min\{x,y\}\right] 1_{[0,1]\times[0,1]}(x,y), \qquad x, y \in \mathbb{R}.$$

(a) [8] Bereken de kansdichtheidsfunctie van X gegeven $Y = y$.

(b) [7] Bereken $\mathbb{E}(X \mid Y = y)$.

(6) [T] De gemeente Leiden voert een onderzoek uit naar de bierconsumptie van jongeren op 3 oktober. Het doel van het onderzoek is om tot een schatting te komen van het gemiddeld aantal glazen dat jongeren tussen 18 en 21 jaar op die feestdag drinken. Daartoe wordt een vrijwillige enquête gehouden onder 900 jongeren. De uitkomsten van die enquête zijn $N_1, \ldots, N_{900}$. Volgens de wet van de grote aantallen geldt dat $\frac{1}{900}\sum_{i=1}^{900} N_i \approx \mu$, waar μ het gezochte maar onbekende gemiddelde is.

(a) [8] Gebruik de centrale limietstelling om een schatting te geven van de kans

$$\mathbb{P}\left(\left|\left(\frac{1}{900}\sum_{i=1}^{900} N_i\right) - \mu\right| > 0.1\right)$$

wanneer gegeven is dat $N_1, \ldots, N_{900}$ onafhankelijk en identiek verdeeld zijn met standaarddeviatie 1 glas. Gebruik dat $\Phi(3) \approx 0.99865$, waar Φ de cumulatieve kansverdelingsfunctie van de standaard normale verdeling is.

(b) [7] De uitkomst van de enquête is dat er 4800 glazen bier zijn gedronken. Geef aan hoe we hiermee het gemiddelde μ kunnen schatten, en wat de kans is dat deze schatting correct is.

(7) [R]

(a) [5] Geef de definitie van een Markovketen $X = (X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ op een aftelbare toestandsruimte S.

(b) [5] Geef een formule voor de kans $\mathbb{P}(X_n = j \mid X_0 = i)$ dat een tijds-homogene Markovketen startend in $i \in S$ na n stappen in $j \in S$ is, gebruikmakend van de overgangsmatrix $P = (P_{ij})_{i,j\in S}$.

(8) [I] Zij $X = (X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ een irreducibele en aperiodieke Markovketen op een *eindige* toestandsruimte S.

(a) [5] Formuleer het bewijs van de convergentiestelling van X. Geef aan waar in het bewijs je gebruikt dat X Markov, irreducibel en aperiodiek is. *Hint:* Gebruik een koppeling van twee copieën X^1, X^2 van X, de eerste startend in een willekeurige toestand $x_* \in S$, de tweede startend in de stationaire verdeling π op S. Plak X^1 en X^2 aan elkaar nadat ze elkaar ontmoeten, d.w.z. op tijdstip $\tau = \inf\{n \in \mathbb{N}_0 \colon X_n^1 = X_n^2\}$.

(b) [5] Is de stelling ook waar op een aftelbaar oneindige toestandsruimte?