Proeftentamen Inleiding Kansrekening

21 maart 2016

Docent: Prof. dr. F. den Hollander

Dit proeftentamen bevat drie opgaven, gebaseerd op de stof uit hoofdstukken 1 t/m 5 van het boek, en zijn van het niveau dat voor het tentamen (9 juni, 2016) en het hertentamen (4 juli, 2016) gehanteerd zal worden. Het maken van de opgaven kost circa anderhalf uur. Op 28 maart 2016 zet ik de uitwerking op Blackboard. Er zijn vragen in drie categorieën: **R** = reproductie, **T** = toepassing, **I** = inzicht.

---

(1) (a) [**R**] Laat zien dat

$$\mathbb{P}(A \cup B \cup C) = 1 - \mathbb{P}(A^c \mid B^c \cap C^c)\, \mathbb{P}(B^c \mid C^c)\, \mathbb{P}(C^c).$$

(b) [**I**] ("Eddington's controverse") In een rechtsprocess werden 4 getuigen gehoord: a, b, c, d. Elk van hen sprak, onafhankelijk van de anderen, met kans $\frac{1}{3}$ de waarheid. In hun getuigenissen, beweerde a dat b ontkende dat c verklaarde dat d loog. Wat is de conditionele kans, gegeven hun getuigenissen, dat d de waarheid sprak?

(2) (a) [**T**] Zij X de discrete stochast met kansmassafunctie

$$p_X(k) = C/k(k+1), \qquad k \in \mathbb{N}.$$

Bereken de waarde van C. Voor welke waarden van $\alpha \in \mathbb{R}$ is $\mathbb{E}(X^\alpha) < \infty$?

(b) [**T**] Zij X de continue stochast met kansdichtheidsfunctie

$$f_X(x) = C \exp(-x - e^{-x}), \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Bereken de waarde van C. Voor welke waarden van $\alpha \in \mathbb{R}$ is $\mathbb{E}(X^\alpha) < \infty$?

(3) (a) [**R**] Laat $X_1, \ldots, X_n$ onafhankelijke Poisson verdeelde stochasten zijn, met parameters $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in (0, \infty)$. Bereken de kansgenererende functie van X_1 en met behulp daarvan de kansgenererende functie van $S_n = X_1 + \cdots + X_n$. Wat zijn de convergentiestralen van deze functies? Wat is de kansmassafunctie van S_n?

(b) **[I]** Een deeltje voert een "stochastische wandeling" uit op de hoekpunten van een vierkant $ABCD$, d.w.z. het maakt onafhankelijke sprongen naar buurpunten, waarbij elk van de twee beschikbare buurpunten met kans $\frac{1}{2}$ gekozen wordt. Zij $p_{AA}(n)$, $n \in \mathbb{N}_0$, de kans dat het deeltje startend in A op tijdstip n in A is. Laat zien dat de genererende functie $G_{AA}(s) = \sum_{n\in\mathbb{N}_0} s^n\, p_{AA}(n)$ gelijk is aan $\frac{1}{2}(1 + \frac{1}{1-s^2})$. *Hint:* De oplossing kan op twee manieren worden afgeleid: óf door de symmetrie van het vierkant te gebruiken óf door te kijken naar het aantal stappen naar links en naar recht, respectievelijk, het aantal stappen naar boven en naar beneden.

OPLOSSINGEN

---

(1) (a) Schrijf

$$\mathbb{P}(A \cup B \cup C) = 1 - \mathbb{P}([A \cup B \cup C]^c) = 1 - \mathbb{P}(A^c \cap B^c \cap C^c)$$

en

$$\mathbb{P}(A^c \cap B^c \cap C^c) = \frac{\mathbb{P}(A^c \cap B^c \cap C^c)}{\mathbb{P}(B^c \cap C^c)}\, \frac{\mathbb{P}(B^c \cap C^c)}{\mathbb{P}(C^c)}\, \mathbb{P}(C^c).$$

en gebruik de definitie van conditionele kans.

(b) Schrijf A, A^c wanneer getuige a de waarheid sprak, respectievelijk, loog, etc. De enige uitkomsten consistent met "d sprak de waarheid" zijn

$$A \cap B \cap C \cap D, \quad A \cap B^c \cap C^c \cap D, \quad A^c \cap B \cap C^c \cap D, \quad A^c \cap B^c \cap C \cap D,$$

met totale kans $\frac{1+4+4+4}{3^4} = \frac{13}{81}$. Idem, de enige uitkomsten consistent met "d loog" zijn

$$A^c \cap B^c \cap C^c \cap D^c, \quad A^c \cap B \cap C \cap D^c, \quad A \cap B^c \cap C \cap D^c, \quad A \cap B \cap C^c \cap D^c,$$

met totale kans $\frac{16+4+4+4}{3^4} = \frac{28}{81}$. Schrijf S voor de gegeven bewering. Dan geldt

$$\mathbb{P}(D \mid S) = \frac{\mathbb{P}(D \cap S)}{\mathbb{P}(D \cap S) + \mathbb{P}(D^c \cap S)} = \frac{\frac{13}{81}}{\frac{13}{81} + \frac{28}{81}} = \frac{13}{41}.$$

(2) (a) Bereken

$$\sum_{k\in\mathbb{N}} p_X(k) = \sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{C}{k(k+1)} = C \sum_{k\in\mathbb{N}} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) = C.$$

Derhalve geldt $C = 1$. Omdat

$$\mathbb{E}(X^\alpha) = \sum_{k\in\mathbb{N}} k^\alpha \, p_X(k),$$

zien we dat het α-de moment eindig is dan en slechts dan wanneer $\alpha - 2 < -1$, d.w.z. $\alpha < 1$.

(b) Bereken

$$\int_{\mathbb{R}} f_X(x)\, dx = \int_{\mathbb{R}} C \exp(-x - e^{-x})\, dx = C \int_0^\infty e^{-y}\, dy = C,$$

waarbij we de transformatie van variable $y = e^{-x}$ uitvoeren. Derhalve geldt $C = 1$. Omdat

$$\mathbb{E}(X^\alpha) = \int_{\mathbb{R}} x^\alpha \, f_X(x)\, dx,$$

zien we dat het α-de moment eindig is voor alle $\alpha \in \mathbb{R}$.

(3) (a) De kansmassafunctie van X_1 is

$$p_{X_1}(k) = e^{-\lambda_1} \frac{(\lambda_1)^k}{k!}, \qquad k \in \mathbb{N}_0.$$

De kansgenererende functie van X_1 is

$$G_{X_1}(s) = \sum_{k\in\mathbb{N}_0} s^k \, p_{X_1}(k) = e^{-\lambda_1} \sum_{k\in\mathbb{N}_0} \frac{(\lambda_1 s)^k}{k!} = e^{\lambda_1(s-1)}.$$

De kansgenererende functie van S_n is derhalve

$$G_{S_n}(s) = G_{X_1}(s) \times \cdots \times G_{X_n}(s) = e^{\mu(s-1)}$$

met $\mu = \lambda_1 + \ldots + \lambda_n$. De convergentiestralen van beide functies zijn oneindig. De kansverdeling van S_n is Poisson met parameter μ.

(b) Merk eerst op dat $p_{AA}(n) = 0$ wanneer n oneven is. De wandelaar is na $2n$ stappen terug in hoekpunt A wanneer het aantal stappen naar links en naar rechts aan elkaar gelijk zijn *en* het aantal stappen naar boven en naar beneden aan elkaar gelijk zijn. Het aantal manieren om

$2m$ horizontale stappen te kiezen uit een totaal van $2n$ stappen is gelijk aan $\binom{2n}{2m}$. Derhalve geldt dat

$$p_{AA}(2n) = \sum_{m=0}^{n} \binom{2n}{2m} (\tfrac{1}{2})^{2n} = \tfrac{1}{2}, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Hiermee volgt

$$G_{AA}(s) = \sum_{n\in\mathbb{N}_0} s^n\, p_{AA}(n) = 1+\sum_{n\in\mathbb{N}} s^{2n}\,\tfrac{1}{2} = 1+\tfrac{1}{2}\frac{s^2}{1-s^2} = \tfrac{1}{2}\,[1+(1-s^2)^{-1}].$$

De formule $p_{AA}(2n) = \frac{1}{2}$, $n \in \mathbb{N}$, volgt ook uit de symmetrie van het vierkant: de kansen, dat de wandelaar na $2n$ stappen in hoekpunt A is, respectievelijk, in het overstaande hoekpunt C is, zijn aan elkaar gelijk.