Uitwerking Hertentamen Inleiding Kansrekening

6 juli 2015, 14.00–17.00 uur

Docent: Prof. dr. F. den Hollander

Bij dit tentamen is het gebruik van boek en aantekeningen niet toegestaan. Er zijn 10 vragen. Elke vraag is 10 punten waard. Het totaal aantal punten is 100.

Schrijf je naam, studentnummer en studierichting op elk blad dat je inlevert. Motiveer steeds je antwoorden: een los antwoord zonder uitleg is niet voldoende. Elke berekening dient van een toelichting te worden voorzien.

---

(1) **[10]** A en B zijn gebeurtenissen met kans $\mathbb{P}(A) = \frac{3}{4}$ en $\mathbb{P}(B) = \frac{1}{3}$.

(a) Laat zien dat $\frac{1}{12} \leq \mathbb{P}(A \cap B) \leq \frac{1}{3}$.

(b) Geef voorbeelden waarvoor de grenzen bereikt worden.

- (a) De gevraagde ongelijkheden volgen uit de gelijkheid (zie Figuur 1.1 van het boek)
$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cup B),$$
in combinatie met de triviale ongelijkheden $\mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}(A \cup B) \leq 1$.
- (b) De grenzen corresponderen met de gevallen $B \subset A$, respektievelijk, $A \cup B = \Omega$ (= de hele toestandsruimte). De waarden van $\mathbb{P}(A)$ en $\mathbb{P}(B)$ laten beide mogelijkheden toe.

(2) **[10]** X is een geometrisch verdeelde stochast, d.w.z. X heeft kansmassafunctie
$$p_X(k) = \mathbb{P}(X = k) = p(1-p)^{k-1}, \qquad k \in \mathbb{N},$$
voor zekere $p \in (0,1)$. Wat is de kansmassafunctie van de stochast $Y = \max\{X, 10\}$?

- Omdat $Y = X$ als $X \geq 11$ en $Y = 10$ als $1 \leq X \leq 10$, geldt
$$p_Y(k) = \begin{cases} p_X(k), & k \geq 11, \\ \sum_{l=1}^{10} p_X(l), & k = 10, \\ 0, & \text{elders.} \end{cases}$$

De middelste term is gelijk aan $\sum_{l=1}^{10} p_X(l) = 1-(1-p)^{10}\frac{p}{1-(1-p)} = 1-(1-p)^{10}$.

(3) **[10]** Vanaf 12 uur komen bussen elke 10 minuten aan bij een halte. Je arriveert bij de halte T minuten na 12 uur, waarbij T een continue stochast is met de volgende cumulatieve kansverdelingsfunctie heeft:

$$F_T(x) = \mathbb{P}(T \leq x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ \frac{x}{60}, & 0 \leq x \leq 60, \\ 1, & x > 60. \end{cases}$$

Wat is de kans dat je minder dan 5 minuten op een bus hoeft te wachten?

- De tijd T is uniform verdeeld over het interval $[0, 60]$ (zie Figuur 5.2 van het boek). Bussen arriveren op de tijdstippen $10j$, $j \in \{0, 1, 2, \ldots\}$. Je wacht minder dan 5 minuten dan en slechts dan als $T \in \cup_{j=1}^{6}(10j-5, 10j]$. Derhalve is de gevraagde kans gelijk aan $\frac{1}{60}\sum_{j=1}^{6} 5 = \frac{1}{2}$.

(4) **[10]** M is een strikt positieve stochast. Is de gelijkheid (zie Figuur 1.1 van het boek)

$$\mathbb{E}\Big(\frac{1}{M}\Big) = \frac{1}{\mathbb{E}(M)}$$

altijd waar of soms waar? Geef voorbeelden.

- Omdat de functie $x \mapsto 1/x$ strikt convex is op $(0, \infty)$ volgt uit Jensen's ongelijkheid (Stelling 7.67 van het boek) dat

$$\mathbb{E}\Big(\frac{1}{M}\Big) \geq \frac{1}{\mathbb{E}(M)}$$

met gelijkheid dan en slechts dan wanneer M constant is. De gelijkheid is dus soms waar, maar niet altijd.

(5) **[10]** X, Y en Z zijn onafhankelijk en uniform verdeeld op $[0, 1]$.

(a) Bereken de gezamenlijke kansdichtheidsfunctie van de stochasten $U = XY$ en $V = Z^2$.

(b) Laat zien dat $\mathbb{P}(U < V) = \frac{5}{9}$. *Hint*: De primitieve van de functie $u \mapsto u^{1/2}\log(\frac{1}{u})$ is de functie $u \mapsto \frac{4}{9}u^{3/2} + \frac{2}{3}u^{3/2}\log(\frac{1}{u})$.

- (a) Omdat X, Y, Z onafhankelijk zijn, geldt hetzelfde voor $U = XY, V = Z^2$. I.h.b. geldt dus dat $f_{U,V}(u, v) = f_U(u)f_V(v)$, $u, v \in \mathbb{R}$ (zie Stelling 6.31 van het boek). We berekenen, gebruikmakend van het feit dat $f_{X,Y}(x,y) = f_X(x) f_Y(y)$ met $f_X(x) = 1$, $x \in [0,1]$, en $f_Y(y) = 1$, $y \in [0,1]$, en 0 elders,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(U \le u) = \mathbb{P}(XY \le u) &= \int_0^1 dx \int_0^{\min\{u/x,1\}} dy \\ &= \int_0^u dx + \int_u^1 dx\, \tfrac{u}{x} = u + u \log(\tfrac{1}{u}), \qquad u \in (0,1],\end{aligned}$$

en 0 elders. Differentieren naar u geeft $f_U(u) = \log(\frac{1}{u})$, $u \in (0,1]$, en 0 elders. Evenzo berekenen we

$$\mathbb{P}(V \le v) = \mathbb{P}(Z^2 \le v) = \mathbb{P}(Z \le \sqrt{v}\,) = \sqrt{v}, \qquad v \in (0,1],$$

en 0 elders. Differentieren naar v geeft $f_V(v) = 1/2\sqrt{v}$, $v \in (0,1]$. Samen geeft dit $f_{U,V}(u,v) = \log(\frac{1}{u})/2\sqrt{v}$, $u, v \in (0,1]$, en 0 elders.

- (b) We kunnen nu uitrekenen

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(U < V) &= \int_0^1 du \int_u^1 dv\, f_{U,V}(u,v) = \int_0^1 du \log(\tfrac{1}{u}) \int_u^1 dv\, \tfrac{1}{2\sqrt{v}} \\ &= \int_0^1 du \log(\tfrac{1}{u})\,(1 - \sqrt{u}) \\ &= \big[u + u\log(\tfrac{1}{u})\big]_{u=0}^{u=1} - \big[\tfrac{4}{9}u^{3/2} + \tfrac{2}{3}u^{3/2}\log(\tfrac{1}{u})\big]_{u=0}^{u=1} \\ &= 1 - \tfrac{4}{9} = \tfrac{5}{9}\end{aligned}$$

(met de conventie $0 \log 0 = 0$).

(6) **[10]** Bereken de kansdichtheidsfunctie van $Z = X + Y$ wanneer X en Y de volgende gezamenlijke kansdichtheidsfunctie hebben:

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{2}(x+y)e^{-(x+y)}, & x, y \ge 0, \\ 0, & \text{elders.} \end{cases}$$

- Volgens Stelling 6.38 van het boek wordt de kansdichtheidsfunctie van Z gegeven door

$$f_Z(z) = \int_{\mathbb{R}} dx\, f_{X,Y}(x, z-x) = \int_0^z dx\, \tfrac{1}{2} z e^{-z} = \tfrac{1}{2} z^2 e^{-z}, \qquad z \ge 0,$$

en 0 elders.

(7) **[10]** Laat L_1, L_2, L_3 onafhankelijk en uniform verdeeld zijn op $[0,1]$. Wat is de kans dat lijnstukken ter lengte L_1, L_2, L_3 samen een driehoek kunnen opspannen? *Hint*: Schrijf eerst de conditie op waaraan L_3 moet voldoen bij gegeven L_1, L_2.

- Voor gegeven waarden van L_1 en L_2 moet L_3 voldoen aan de ongelijkheid $|L_1 - L_2| < L_3 < L_1 + L_2$ opdat een driehoek kan worden opgespannen. De kans op deze gebeurtenis gelijk is aan

$$\begin{aligned}
&\int_0^1 dl_1 \int_0^1 dl_2 \int_{|l_1-l_2|}^{\min\{1,l_1+l_2\}} dl_3 \\
&= 2\int_0^1 dl_1 \int_{l_1}^1 dl_2 \int_{l_2-l_1}^{\min\{1,l_1+l_2\}} dl_3 \\
&= 2\int_0^1 dl_1 \int_{l_1}^1 dl_2\ [\min\{1,l_1+l_2\} - (l_2 - l_1)] \\
&= 2\int_0^{\frac{1}{2}} dl_1 \int_{l_1}^{1-l_1} dl_2\ 2l_1 + 2\int_0^1 dl_1 \int_{\max\{l_1,1-l_1\}}^1 dl_2\ (1 - l_2 + l_1).
\end{aligned}$$

De eerste integraal is gelijk aan

$$2\int_0^{\frac{1}{2}} dl_1\ 2l_1(1-2l_1) = \tfrac{1}{6}.$$

De tweede integraal is de som van

$$2\int_0^{\frac{1}{2}} dl_1 \int_{1-l_1}^1 dl_2\ (1 - l_2 + l_1) = 3\int_0^{\frac{1}{2}} dl_1\ l_1^2 = \tfrac{1}{8}$$

en

$$2\int_{\frac{1}{2}}^1 dl_1 \int_{l_1}^1 dl_2\ (1 - l_2 + l_1) = \int_{\frac{1}{2}}^1 dl_1\ (1 - l_1^2) = \tfrac{5}{24}.$$

De gevraagde kans is dus gelijk aan $\frac{1}{6} + \frac{1}{8} + \frac{5}{24} = \frac{5}{8}$.

(8) **[10]** $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ en $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ zijn Markovketens op $\mathbb{Z}$. Is $(X_n + Y_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ dan ook een Markovketen op $\mathbb{Z}$?

- Het antwoord is evident nee wanneer de Markovketens niet onafhankelijk van elkaar zijn. Maar het is ook nee wanneer ze wel onafhankelijk van elkaar zijn.

Schrijf $Z_n = X_n + Y_n$. Uit de waarde van Z_n kunnen we niet de waarden van X_n en Y_n herleiden. Derhalve kunnen we niet de conditionele kansverdelingen van X_{n+1} en Y_{n+1} bepalen. De kansverdeling van Z_{n+1} hangt dus niet alleen van Z_n af. M.a.w. door de sommatie gaat de Markoveigenschap verloren (zie Definitie 12.1 van het boek).

(9) **[10]** Laat aan de hand van een voorbeeld zien dat een niet-irreducibele Markovketen op een eindige toestandsruimte verschillende stationaire verdelingen kan hebben.

- Neem de Markovketen op $\{1, 2, 3, 4\}$ met overgangskansen

$$p_{12} = p_{21} = 1, \quad p_{34} = p_{43} = 1, \qquad p_{ij} = 0 \quad \text{elders.}$$

Dan is elke $(\frac{1}{2}\alpha, \frac{1}{2}\alpha, \frac{1}{2}(1-\alpha), \frac{1}{2}(1-\alpha))$ met $\alpha \in [0, 1]$ een stationaire verdeling.

(10) **[10]** Een overgangsmatrix $P = (p_{ij})_{i,j \in S}$ heet dubbel-stochastisch wanneer niet alleen de rijsommen maar ook de kolomsommen gelijk aan 1 zijn, d.w.z. $\sum_{j \in S} p_{ij} = 1$ voor alle $i \in S$ en $\sum_{i \in S} p_{ij} = 1$ voor alle $j \in S$. Veronderstel dat S eindig is en dat P irreducibel en aperiodiek is. Laat zien dat dan de Markovketen $(X_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ met overgangsmatrix P voldoet aan

$$\lim_{n \to \infty} p_{ij}(n) = \frac{1}{|S|} \qquad \text{voor alle } i, j \in S,$$

waar $p_{ij}(n) = \mathbb{P}(X_n = j \mid X_0 = i)$, $i, j \in S$, de n-staps overgangskansen zijn. *Hint*: Gebruik de convergentiestelling voor Markovketens.

- De convergentiestelling voor Markovketens (zie Stelling 12.98 van het boek) zegt dat, wanneer P irreducibel, aperiodiek en positief recurrent is, er geldt dat

$$\lim_{n \to \infty} p_{ij}(n) = \pi_j \qquad \text{voor alle } i, j \in S,$$

met π de unieke stationaire verdeling. Het eindig zijn van S impliceert dat P positief recurrent is, dus we mogen de stelling gebruiken. Het volstaat derhalve om te laten zien dat $\pi_j = 1/|S|$ voor alle $j \in S$, m.a.w. π is de uniforme verdeling op S. Maar dat laatste volgt automatisch wanneer P dubbel-stochastisch is. Immers, π is de unieke oplossing van de vergelijking $\pi = \pi P$, d.w.z. $\pi_j = \sum_{i \in S} \pi_i P_{ij}$, $j \in S$, en het is evident dat de uniforme verdeling een oplossing is.