Uitwerking Tentamen Inleiding Kansrekening

11 juni 2015, 10.00–13.00 uur

Docent: Prof. dr. F. den Hollander

(1) **[6]** Zij $\mathcal{F}$ een gebeurtenissenruimte. Laat zien dat voor elke $B \in \mathcal{F}$ de verzameling $\mathcal{G} = \{A \cap B\colon\ A \in \mathcal{F}\}$ opnieuw een gebeurtenissenruimte is.

- Volgens Definitie 1.1 van het boek moeten we laten zien dat $\mathcal{G}$: (1) niet leeg is; (2) gesloten is onder het nemen van complementen; (3) gesloten is onder het nemen van aftelbare verenigingen. Eigenschap (1) geldt omdat $\mathcal{F}$ niet leeg is. Eigenschap (2) geldt omdat $\Omega\backslash(A \cap B) = (\Omega\backslash A) \cup (\Omega\backslash B)$ en $\mathcal{F}$ aan eigenschappen (2) en (3) voldoet. Eigenschap (3) geldt omdat $\cup_{i=1}^{\infty}(A_i \cap B) = (\cup_{i=1}^{\infty} A_i) \cap B$ en $\mathcal{F}$ aan eigenschap (3) voldoet.

(2) **[7]** Een zuivere dobbelsteen wordt 3 keer gegooid. Zij $A_{ij}$ de gebeurtenis dat worp $i$ en worp $j$ dezelfde uitkomst opleveren. Laat zien dat $A_{ij}$, $1 \leq i < j \leq 3$, paarsgewijs onafhankelijk zijn, maar niet onafhankelijk.

- Zij $X_m$ de uitkomst van worp $m$. Dan hebben we $A_{ij} = \{X_i = X_j\}$. Voor $1 \leq i < j \leq 3$ geldt dat

$$\mathbb{P}(A_{ij}) = \mathbb{P}(X_i = X_j) = \sum_{u=1}^{6} \mathbb{P}(X_i = X_j = u) = \sum_{u=1}^{6} (\tfrac{1}{6})^2 = \tfrac{1}{6}.$$

Voor $1 \leq i < j \leq 3$ en $1 \leq k < l \leq 3$ met $(i,j) \neq (k,l)$ geldt dat

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A_{ij} \cap A_{kl}) &= \mathbb{P}(X_i = X_j, X_k = X_l)\\ &= \mathbb{P}(X_1 = X_2 = X_3) = 6\,(\tfrac{1}{6})^3 = (\tfrac{1}{6})^2,\end{aligned}$$

dus is er paarsgewijze onafhankelijkheid (zie Definitie 1.38 van het boek). Anderzijds geldt ook dat

$$\mathbb{P}(A_{12} \cap A_{23} \cap A_{13}) = \mathbb{P}(X_1 = X_2 = X_3) = (\tfrac{1}{6})^2,$$

dus is er geen tripelgewijze onafhankelijkheid.

(3) **[8]** Zij $X$ een stochast met een continue cumulatieve kansverdelingsfunctie $F_X$. Geef formules voor de cumulatieve kansverdelingsfuncties van de volgende stochasten:

(a) $\sin X$.

(b) $F_X(X)$.

- (a) Zij $Y = \sin X$. Dan $F_Y(y) = \mathbb{P}(Y \le y) = \mathbb{P}(\sin X \le y)$ volgens Definitie 5.2 van het boek. Er geldt

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0, & y \in (-\infty, 1], \\ \sum_{j\in\mathbb{Z}} \big[F_X(b(y) + 2\pi j) - F_X(a(y) + 2\pi j)\big], & y \in (-1, 1), \\ 1, & y \in [1, \infty), \end{cases}$$

met $a(y) < b(y)$ de twee waarden in $[0, 2\pi)$ waarvoor $\sin a(y) = \sin b(y) = y$. De bewering is evident voor $y \in (-\infty, 1]$ en $y \in [1, \infty)$ (inclusief de randwaarden omdat $F_X$ continu is). Voor $y \in (-1, 1)$ geldt dat $\sin x \le y$ dan en slechts dan als $x \in \cup_{j\in\mathbb{Z}}[a(y) + 2\pi j, b(y) + 2\pi j]$.

- (b) Zij $Y = F_X(X)$. Dan $F_Y(y) = \mathbb{P}(Y \le y) = \mathbb{P}(F_X(X) \le y) = \mathbb{P}(X \le u(y))$ $= F_X(u(y))$ met

$$u(y) = \sup\{u \in \mathbb{R} \colon\ F_X(u) \le y\}.$$

Als $F_X$ strikt stijgend op $\mathbb{R}$ is, dan is $u$ de inverse functie horend bij de functie $F_X$, en geldt dat $F_X(u(y)) = y$ voor alle $y \in (0, 1)$. We vinden dan dus dat $F_Y(y) = y$, m.a.w. de stochast $Y$ is uniform verdeeld op $(0, 1)$. Als $F_X$ niet strikt stijgend op $\mathbb{R}$ is, dan geldt hetzelfde omdat $F_X$ rechtscontinu is. Dit is met behulp van approximatie eenvoudig af te leiden. Merk op dat het eindresultaat niet van de keuze van $F_X$ afhangt.

(4) **[6]** $X$ is een stochast met cumulatieve kansverdelingsfunctie $F_X$. Geef de cumulatieve kansverdelingsfuncties van de volgende drie stochasten:

(a) $X^+ = \max\{0, X\}$.

(b) $X^- = -\min\{0, X\}$.

(c) $|X| = X^+ + X^-$.

- (a) Schrijf $F_{X^+}(x) = \mathbb{P}(X^+ \le x) = \mathbb{P}(\max\{0, X\} \le x)$. Er geldt

$$F_{X^+}(x) = \begin{cases} 0, & x \in (-\infty, 0), \\ F_X(x), & x \in [0, \infty). \end{cases}$$

Deze bewering is evident voor $x \in (-\infty, 0)$. Voor $x \in [0, \infty)$ geldt

$$\begin{aligned} &\mathbb{P}(\max\{0, X\} \le x) \\ &\quad = \mathbb{P}(\max\{0, X\} \le x, X \le 0) + \mathbb{P}(\max\{0, X\} \le x, X > 0) \\ &\quad = \mathbb{P}(X \le 0) + \mathbb{P}(X \le x, X > 0) = \mathbb{P}(X \le x). \end{aligned}$$

- (b) Het bewijs verloopt analoog. Er geldt

$$F_{X^-}(x) = \begin{cases} 0, & x \in (-\infty, 0), \\ 1 - F_X(-x), & x \in [0, \infty). \end{cases}$$

- Er geldt

$$F_{|X|}(x) = F_{X^+}(x) - F_{X^-}(x).$$

Deze bewering is evident voor $x \in (-\infty, 0)$, want dan zijn beide termen 0. Voor $x \in [0, \infty)$ hebben we

$$\begin{aligned} F_{|X|}(x) &= \mathbb{P}(|X| \leq x) = \mathbb{P}(-x \leq X \leq x) \\ &= \mathbb{P}(X \leq x) - \mathbb{P}(X > -x) \\ &= F_X(x) - [1 - F_X(-x)]. \end{aligned}$$

(5) [**8**] Een machine gaat kapot na $T$ dagen, waarbij $T$ kansmassafunctie $f_T$ heeft. Gegeven dat de machine na $t$ dagen nog werkt, bereken het gemiddeld aantal dagen na dag $t$ dat de machine nog blijft werken wanneer $f_T$ gelijk is aan:

(a) $f_T(s) = 1/N$, $s \in \{1, \ldots, N\}$, $N \in \mathbb{N}$.

(b) $f_T(s) = (\frac{1}{2})^s$, $s \in \mathbb{N}$.

- (a) De gevraagde conditionele verwachting is gelijk aan (zie Definitie 6.68 van het boek)

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(T - t \mid T > t) &= \frac{\mathbb{E}((T-t)^+)}{\mathbb{P}(T > t)} = \frac{\sum_{s=t+1}^{\infty} (s-t) f_T(s)}{\sum_{s=t+1}^{\infty} f_T(s)} \\ &= \frac{\sum_{s=t+1}^{N} (s-t)}{\sum_{s=t+1}^{N} 1} = \frac{\frac{1}{2}(N-t)[1 + (N-t)]}{N-t} \\ &= \tfrac{1}{2}(N - t + 1), \qquad 0 < t < N. \end{aligned}$$

- (b) Nu geldt

$$\mathbb{E}(T - t \mid T \geq t) = \frac{\sum_{s=t+1}^{\infty} (s-t)(\frac{1}{2})^s}{\sum_{s=t+1}^{\infty} (\frac{1}{2})^s} = \frac{\sum_{u=1}^{\infty} u(\frac{1}{2})^u}{\sum_{u=1}^{\infty} (\frac{1}{2})^u} = 2.$$

Dit is de verwachting van de geometrische verdeling met parameter $\frac{1}{2}$ (zie Voorbeeld 2.36 van het boek).

(6) [**8**] $X_1, \ldots, X_n$ zijn onafhankelijke stochasten, waarbij $X_k$ Bernoulli verdeeld is met parameter $p_k \in (0, 1)$.

(a) Bereken de verwachting en de variantie van de som $\sum_{k=1}^n X_k$.

(b) Laat zien dat voor vaste verwachting de variantie maximaal is dan en slechts dan wanneer alle $p_k$ aan elkaar gelijk zijn.

- (a) Noteer $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$. Dan geldt (zie p. 115 van het boek)

$$\mathbb{E}(S_n) = \sum_{k=1}^n \mathbb{E}(X_k) = \sum_{k=1}^n p_k,$$
$$\mathbb{V}\text{ar}(S_n) = \sum_{k=1}^n \mathbb{V}\text{ar}(X_k) = \sum_{k=1}^n p_k(1-p_k).$$

- (b) Zij $K$ de stochast die met kans $\frac{1}{n}$ de waarde $p_k$, $1 \le k \le n$, aanneemt. Met behulp van Jensen's ongelijkheid (Stelling 7.67 van het boek) volgt dan dat

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n p_k^2 = \mathbb{E}(K^2) \ge \mathbb{E}(K)^2 = \left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n p_k\right)^2,$$

waarbij het gelijkteken geldt dan en slechts dan wanneer $K$ constant is, d.w.z. $p_k = p$ voor alle $1 \le k \le n$ en zekere $p \in (0,1)$. De laatste ongelijkheid kan gelezen worden als

$$\frac{1}{n}\mathbb{V}\text{ar}(S_n) \le \frac{1}{n}\mathbb{E}(S_n) - \left(\frac{1}{n}\mathbb{E}(S_n)\right)^2,$$

en dus is voor vaste verwachting de variantie maximaal dan en slechts dan wanneer alle $p_k$ aan elkaar gelijk zijn.

(7) [**8**] Voor welke waarden van $C$ zijn de volgende functies kansdichtheidsfuncties?

(a) $f(x) = C/\sqrt{x(1-x)}$, $x \in (0,1)$.

(b) $f(x) = C\exp[-x-\exp(-x)]$, $x \in \mathbb{R}$.

*Hint*: Gebruik transformatie van variabelen.

- (a) Transformeer van $x$ naar $\theta$ via $x = \sin^2\theta$. Omdat $\frac{dx}{d\theta} = 2\sin\theta\cos\theta$ en $1-\sin^2\theta = \cos^2\theta$, vinden we

$$1 = \int_0^1 \frac{C dx}{\sqrt{x(1-x)}} = \int_0^{\pi/2} \frac{2C\sin\theta\cos\theta\, d\theta}{\sin\theta\cos\theta} = \int_0^{\pi/2} 2C d\theta = \pi C.$$

Derhalve is $C = 1/\pi$. Merk op dat we hier te maken hebben met de BETA-verdeling met parameters $s = t = \frac{1}{2}$ (zie p. 69 van het boek). De waarde van $C$ die bij deze kansverdeling hoort is gelijk aan $\Gamma(1)/\Gamma(\frac{1}{2})^2 = 1/\pi$.

- Transformeer van $x$ naar $y = e^{-x}$. Omdat $\frac{dy}{dx} = -e^{-x} = -y$, geldt

$$1 = \int_{\mathbb{R}} dx\, C\, e^{-x-e^{-x}} = \int_{\infty}^{0} \frac{dy}{(-y)}\, C\, y\, e^{-y} = C \int_{0}^{\infty} dy\, e^{-y} = C.$$

(8) [**8**] $X$ en $Y$ hebben gezamenlijke kansdichtheidsfunctie $f_{X,Y}(x,y) = \lambda^2 e^{-\lambda y}$, $0 \leq x \leq y$.

(a) Bereken $f_X(x)$, de marginale kansdichtheidsfunctie van $X$.

(b) Bereken $f_{Y|X}(y\,|\,x) = f_{X,Y}(x,y)/f_X(x)$, de conditionele kansdichtheidsfunctie van $Y$ gegeven $X = x$.

- (a) Bereken (zie p. 88 van het boek)

$$f_X(x) = \int_{\mathbb{R}} f_{X,Y}(x,y)\, dy = \int_{x}^{\infty} \lambda^2 e^{-\lambda y}\, dy = \lambda e^{-\lambda x}, \qquad x \geq 0,$$

en $f_X(x) = 0$ elders.

- (b) Er volgt dat

$$f_{Y|X}(y\,|\,x) = \frac{\lambda^2 e^{-\lambda y}}{\lambda e^{-\lambda x}} = \lambda e^{-\lambda(y-x)}, \qquad 0 \leq x \leq y,$$

en $f_{Y|X}(y\,|\,x) = 0$ elders.

(9) [**8**] $X$ is standaard normaal verdeeld, d.w.z. $f_X(x) = (2\pi)^{-1/2} \exp[-\frac{1}{2}x^2]$, $x \in \mathbb{R}$. Laat zien dat voor elke $c > 0$ de stochast

$$Y = \begin{cases} X, & |X| < c, \\ -X, & |X| \geq c, \end{cases}$$

opnieuw standaard verdeeld is, en bereken de covariantie van $X$ en $Y$.

- Schrijf (zie p. 67 van het boek)

$$f_Y(x)dx = \mathbb{P}(Y \in [x, x+dx)) = \begin{cases} \mathbb{P}(X \in (x, x+dx]), & x \in (-c,c), \\ \mathbb{P}(X \in (-x-dx, -x]), & x \in \mathbb{R}\backslash(-c,c). \end{cases}$$

De eerste regel is gelijk aan $f_X(x)dx$, de tweede $f_X(-x)dx$. Omdat $f_X(x) = f_X(-x)$ voor alle $x \in \mathbb{R}$, volgt dat het rechterlid gelijk is aan $F_X(x)$ voor alle

$x \in \mathbb{R}$. De covariantie van $X$ en $Y$ is gelijk aan (zie Stelling 5.58 en p. 115 van het boek)

$$\mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\,\mathbb{E}(Y) = \int_{\mathbb{R}} dx\, xy(x)\, f_X(x) - 0 \times 0,$$

met $y(x) = x$ als $|x| < c$ en $y(x) = -x$ als $|x| \geq c$. De integraal is gelijk aan

$$\begin{aligned}&\int_{(-c,c)} dx\, x^2\, f_X(x) - \int_{\mathbb{R}\setminus(-c,c)} dx\, x^2\, f_X(x)\\ &\qquad = 1 - 2\int_{\mathbb{R}\setminus(-c,c)} dx\, x^2\, f_X(x) = 1 - 4\int_c^\infty dx\, \frac{x^2}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{1}{2}x^2}.\end{aligned}$$

De integraal kan niet in gesloten vorm worden uitgerekend.

(10) **[8]** $X$ en $Y$ zijn onafhankelijk en exponentieel verdeeld met parameters $\lambda_X \in (0,\infty)$ en $\lambda_Y \in (0,\infty)$. Zij $U = \min\{X,Y\}$, $V = \max\{X,Y\}$ en $W = V - U$.

(a) Bereken $\mathbb{P}(X \leq Y)$.

(6) Laat zien dat $U$ en $W$ onafhankelijk zijn.

- (a) De gezamenlijke kansdichtheidsfunctie van het paar $X, Y$ is (zie Voorbeeld 5.16 en p. 88 van het boek)

$$f_{X,Y}(x,y) = \lambda_X e^{-\lambda_X x}\, \lambda_Y e^{-\lambda_Y y}, \qquad x, y \geq 0,$$

en $f_{X,Y}(x,y) = 0$ elders. Hieruit leiden we af dat

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X \leq Y) &= \int_{\mathbb{R}} dx \int_{\mathbb{R}} dy\, f_{X,Y}(x,y)\, 1_{\{0\leq x\leq y\}}\\ &= \int_0^\infty dx\, \lambda_X e^{-\lambda_X x} \int_x^\infty dy\, \lambda_Y e^{-\lambda_Y y}\\ &= \int_0^\infty dx\, \lambda_X e^{-(\lambda_X+\lambda_Y)x} = \frac{\lambda_X}{\lambda_X+\lambda_Y}.\end{aligned}$$

- (b) Schrijf uit

$$\begin{aligned}F_{U,W}(u,w) &= \mathbb{P}(U \leq u, W \leq w)\\ &= \mathbb{P}\big(\min\{X,Y\} \leq u, \max\{X,Y\} - \min\{X,Y\} \leq w\big)\\ &= \int_0^u dx \int_x^{w+x} dy\, f_{X,Y}(x,y) + \int_0^u dy \int_y^{w+y} dx\, f_{X,Y}(x,y).\end{aligned}$$

De eerste integraal is gelijk aan

$$\begin{aligned}
&\int_0^u dx\,\lambda_X\,e^{-\lambda_X x}\big[e^{-\lambda_Y x} - e^{-\lambda_Y(w+x)}\big] \\
&= \frac{\lambda_X}{\lambda_X+\lambda_Y}\big[1-e^{-(\lambda_X+\lambda_Y)u}\big][1-e^{-\lambda_Y w}],
\end{aligned}$$

de tweede integraal (verwissel $\lambda_X, \lambda_Y$ en $x, y$)

$$\begin{aligned}
&\int_0^u dy\,\lambda_Y\,e^{-\lambda_Y y}\big[e^{-\lambda_X y} - e^{-\lambda_X(w+y)}\big] \\
&= \frac{\lambda_Y}{\lambda_X+\lambda_Y}\big[1-e^{-(\lambda_X+\lambda_Y)u}\big][1-e^{-\lambda_X w}].
\end{aligned}$$

We vinden dus dat

$$F_{U,W}(u,w) = \frac{\big[1-e^{-(\lambda_X+\lambda_Y)u}\big]}{\lambda_X+\lambda_Y}\Big(\lambda_X[1-e^{-\lambda_Y w}] + \lambda_X[1-e^{-\lambda_Y w}]\Big).$$

Omdat dit het product is van twee functies die alleen van $u$, respectievelijk, alleen van $w$ afhangen, geldt volgens Stellingen 3.16 en 6.31 van het boek dat $U$ en $W$ onafhankelijk zijn.

(11) **[6]** Bereken de kansgenererende functie van de negatieve binomiale verdeling $f(k) = \binom{k-1}{n-1}p^n(1-p)^{k-n}$, $k = n, n+1, \ldots$, met parameters $p \in (0,1)$ en $n \in \mathbb{N}$. *Hint*: Gebruik de identiteit $\sum_{l=0}^{\infty}\binom{-n}{l}(-x)^l = (1-x)^{-n}$, $n \in \mathbb{N}$, $x \in [0,1]$.

- De kansgenererende functie wordt gegeven door

$$\begin{aligned}
G(s) &= \sum_{k=0}^{\infty} s^k f(k) = \sum_{k=n}^{\infty} s^k \binom{k-1}{n-1} p^n(1-p)^{k-n} \\
&= (ps)^n \sum_{k=n}^{\infty}\binom{k-1}{n-1}[s(1-p)]^{n-k} \\
&= \left(\frac{ps}{\bar{p}}\right)^n \sum_{k=n}^{\infty}\binom{k-1}{n-1}\bar{p}^n(1-\bar{p})^{n-k},
\end{aligned}$$

waar we de nieuwe variable $\bar{p} = 1-(1-p)s$ invoeren. De laatste som is gelijk aan 1 vanwege de normalisatie van de negatieve binomiale verdeling (zie p. 27

van het boek):

$$\sum_{k=0}^{\infty} f(k) = \sum_{k=n}^{\infty} \binom{k-1}{n-1} p^n (1-p)^{k-n} = p^n \sum_{l=0}^{n} \binom{n+l-1}{l} (1-p)^l$$
$$= p^n \sum_{l=0}^{\infty} \binom{-n}{l} [-(1-p)]^l = p^n [1-(1-p)]^{-n} = 1.$$

Hier gebruiken we de identiteit

$$\binom{n+l-1}{l} = \frac{(n+l-1)(n+l-2) \times \cdots \times n}{l!}$$
$$= (-1)^l \, \frac{-n(-n-1) \times \cdots \times (-n-l+1)}{l!} = (-1)^l \binom{-n}{l}.$$

We vinden dus dat

$$G(s) = \left( \frac{ps}{1-(1-p)s} \right)^n .$$

Merk op dat dit de $n$-de macht is van de kansgenererende functie van de geometrische verdeling $f_{\mathrm{GEO}}(k) = p(1-p)^{k-1}$, $k = 1, 2, \ldots$, met parameter $p \in (0,1)$. Dat komt omdat een een negatief bionomiaal verdeelde stochast de som is van $n$ onafhankelijke copieën van een geometrisch verdeelde stochast (zie Voorbeeld 2.22 van het boek).

(12) [**6**] Zij $X_n$ de maximum worp uit $n \in \mathbb{N}$ worpen met een zuivere dobbelsteen. Laat zien dat $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ een Markovketen is, en bereken de overgangskansen $\mathbb{P}(X_{n+1} = j \,|\, X_n = i)$, $1 \le i, j \le 6$.

- Zij $W_i$ de uitkomst van worp $i$. Dan geldt $X_n = \max\{W_1, \ldots, W_n\}$. Derhalve $X_{n+1} = \max\{X_n, W_{n+1}\}$, en dus

$$\mathbb{P}(X_{n+1} = j \,|\, X_n = i) = \mathbb{P}(\max\{i, W_{n+1}\} = j) = \begin{cases} 0, & j < i, \\ \frac{1}{6} i, & j = i, \\ \frac{1}{6}, & j > i. \end{cases}$$

Merk op dat de rijsommen van deze matrix tot 1 optellen (zie Propositie 12.3 van het boek).

(13) [**8**] Een deeltje voert een stochastische wandeling uit op de hoekpunten van een vierkant. Bij elke stap heeft het: kans $\frac{1}{4}$ om te pauzeren en voor elk van de twee aangrenzende hoekpunten kans $\frac{3}{8}$ om naar dat hoekpunt te springen.

(a) Bereken het gemiddeld aantal stappen voordat het deeltje terugkeert naar waar het start.

(b) Bereken het gemiddeld aantal stappen voordat het deeltje het diagonaal tegenoverliggende hoekpunt bereikt.

- (a) Vanwege de symmetrie van het vierkant volstaat het om te kijken naar de afstand van het deeltje tot zijn startpunt. Dat is een Markovketen op de toestandsruimte $S = \{0, 1, 2\}$ met overgangskansen

$$p_{00} = p_{11} = p_{22} = \tfrac{1}{4}, \quad p_{01} = p_{21} = \tfrac{3}{4}, \quad p_{10} = p_{12} = \tfrac{3}{8}.$$

Zij $E_x$ het gemiddeld aantal stappen voordat het deeltje 0 bereikt startend in $x \in \{0, 1, 2\}$. Dan gelden de drie relaties

$$\begin{aligned} E_0 &= 0, \\ E_1 &= p_{10}(1 + E_0) + p_{11}(1 + E_1) + p_{12}(1 + E_2), \\ E_2 &= p_{21}(1 + E_1) + p_{22}(1 + E_2). \end{aligned}$$

De oplossing is $E_0 = 0$, $E_1 = 4$, $E_2 = \frac{16}{3}$. Het gemiddeld aantal stappen voordat het deeltje terugkeert naar 0 als het start in 0 is gelijk aan

$$p_{00}(1 + 0) + p_{01}(1 + E_1) = 4.$$

Merk op dat dit aansluit bij Stelling 12.83, die zegt dat de gemiddelde terugkeertijd naar toestand $i \in S$ gelijk is aan $1/\pi_i$, met $\pi = (\pi_i)_{i \in S}$ de stationaire verdeling (= invariante verdeling). Voor de stochastische wandeling op het vierkant is die gelijk aan $(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4})$, voor de gereduceerde Markovketen $(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4})$.

- (b) Het gemiddeld aantal stappen voordat het deeltje 2 bereikt vanuit 0 is, vanwege symmetrie, gelijk aan het gemiddeld aantal stappen voordat het deeltje 0 bereikt vanuit 2. Dat laatste is gelijk aan $E_2$.

(14) **[5]** Laat zien dat intercommunicerende toestanden van een Markovketen dezelfde periode hebben.

- Dit is het eerste onderdeel van Stelling 12.75 van het boek. Gegeven twee toestanden $i$ en $j$ zodanig dat $i \leftrightarrow j$. Dan bestaan er $m, n \in \mathbb{N}$ zodanig dat $p_{ij}(m)p_{ji}(n) = \alpha > 0$. In het bijzonder geldt dat $p_{ii}(m + r + n) \geq p_{ij}(m)p_{jj}(r)p_{ji}(n) = \alpha p_{jj}(r)$ voor alle $r \in \mathbb{N}_0$. Door $r = 0$ te kiezen volgt dat

$d_i \mid m+n$ ($d_i$ is een deler van $m+n$), waar $d_i$ de periode van $i$ is. Nu redeneren we als volgt. Voor alle $r \in \mathbb{N}$ geldt

$$\begin{array}{llllll} d_i \nmid r & \Longrightarrow & d_i \nmid m+r+n & \Longrightarrow & p_{ii}(m+r+n) = 0 \\ & \Longrightarrow & p_{jj}(r) = 0 & \Longrightarrow & d_j \nmid r. \end{array}$$

Derhalve $d_i \mid d_j$. Door $i$ en $j$ te verwisselen vinden we ook dat $d_j \mid d_i$, en dus concluderen we dat $d_i = d_j$.