

Hertentamen Inleiding Statistiek 2017-2018

Toegestane hulpmiddelen: een eenvoudige rekenmachine. Geen boeken, aantekeningen, grafische rekenmachines, telefoons, smart watches of andere hulpmiddelen.

Licht al je antwoorden toe.

1. De stochastische grootheden X_1, \dots, X_n zijn onderling onafhankelijk en continue verdeeld volgens de kansdichtheid

$$p_\theta(x) = \frac{2x}{\theta^2} \mathbf{1}\{0 \leq x \leq \theta\}.$$

Hierin is $\theta > 0$ een onbekende parameter. De waarneming is $X = (X_1, \dots, X_n)$.

- (a) Laat zien dat $3\bar{X}/2$ een momentenmethodeschatter van θ is.
- (b) Bereken de verwachte kwadratische fout (MSE) van de momentenmethodeschatter uit (a).
- (c) Bepaal de meest aannemelijke schatter (MLE) van θ .
- (d) Laat zien dat de cdf van $X_{(n)} = \max\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$ wordt gegeven door $\mathbb{P}_\theta(X_{(n)} \leq x) = \left(\frac{x}{\theta}\right)^{2n}$ voor $0 \leq x \leq \theta$.
- (e) Laat zien dat $X_{(n)}/\theta$ een pivot is.
- (f) Bepaal een $(1 - \alpha) \cdot 100\%$ -betrouwbaarheidsinterval voor θ .
2. Gegeven zijn twee kansdichtheden,

$$f_0(x) = 2x \mathbf{1}\{0 \leq x \leq 1\} \quad \text{en} \quad f_1(x) = \mathbf{1}\{0 \leq x \leq 1\}.$$

We doen één waarneming X uit een kansverdeling met dichtheid f , en willen de nulhypothese $H_0 : f = f_0$ toetsen tegen het alternatief $H_1 : f = f_1$.

- (a) Bepaal de likelihoodratio statistiek voor bovenstaande hypothesen.
- (b) Bepaal de meest onderscheidende (lotings)toets met onbetrouwbaarheidsdrempel precies gelijk aan α_0 .
- (c) Bepaal het onderscheidend vermogen (power) voor de toets uit onderdeel (a), als $\alpha_0 = 0.05$.
- (d) Stel we nemen $x = 0.42$ waar. Wat is de p -waarde van deze waarneming? Wordt H_0 verworpen op basis van deze waarneming, met significantieniveau $\alpha_0 = 0.10$?
3. De stochastische grootheden X_1, \dots, X_n zijn onderling onafhankelijk en identiek verdeeld volgens de kansdichtheid

$$p_\theta(x) = \theta x^{\theta-1} \mathbf{1}\{0 < x < 1\}.$$

Hierin is de parameter $\theta > 0$ onbekend. De waarneming is $X = (X_1, \dots, X_n)$.

- (a) Bepaal de meest aannemelijke schatter (MLE) voor θ .
- (b) Bepaal de meest aannemelijke schatter (MLE) voor $\sqrt{\theta}$.
- (c) Geef de Cramer-Rao ondergrens voor de variantie van zuivere schatters van θ .
- (d) Bepaal een ééndimensionale voldoende statistische grootheid voor θ .
- (e) Vind een volledige en voldoende statistiek voor θ .
- (f) Is de grootheid uit vraag (e) UMVZ voor θ ?