Inleiding Statistiek – Tentamen 17 december 2015

Aan het eind van het tentamen is een tabel ingevoegd.
Gebruik van een zakrekenmachine is toegestaan maar niet nodig.
De vier opgaven hebben gelijk gewicht.
Licht je antwoorden toe!

Opgave 1. De stochastische grootheden $X_1, \ldots, X_n$ zijn onderling onafhankelijk en identiek verdeeld met kansdichtheid

$$f_\theta(x) = \begin{cases} e^{-(x-\theta)} & \text{als } x \geq \theta, \\ 0 & \text{anders.} \end{cases}$$

De parameter $\theta \in \mathbb{R}$ is onbekend. Laat $X_{(1)} = \min(X_1, \ldots, X_n)$. De exponentiële verdeling met parameter λ heeft kansdichtheid $x \mapsto \lambda e^{-\lambda x}$, voor $x > 0$; en heeft verwachting $1/\lambda$ en variantie $1/\lambda^2$.

a. Laat zien dat $X_{(1)} - \theta$ exponentieel verdeeld is met parameter n.
b. Welke van de schatters $X_{(1)} + c$ voor θ verdient de voorkeur ($c \in \mathbb{R}$)?
c. Bepaal een exact betrouwbaarheidsinterval met betrouwbaarheid 95% voor θ.

Opgave 2. De stochastische grootheden $X_1, \ldots, X_n$ zijn onderling onafhankelijk met kansdichtheid $P_\theta(X_i = x) = \theta^{x-1}(1-\theta)$, voor $x = 1, 2, \ldots$. Hierin is $\theta \in (0,1)$ een onbekende parameter. Men kan laten zien dat $\mathrm{E}_\theta X_i = (1-\theta)^{-1}$ en $\mathrm{var}_\theta X_i = (1-\theta)^{-2}$.

a. Bepaal de momentenschatter voor θ.
b. Bepaal de meest aannemelijke schatter $\hat{\theta}_n$ voor θ.
c. Bepaal de Fisher informatie voor θ in 1 waarneming.
d. Welke verdeling bezit $\sqrt{n}(\hat{\theta}_n - \theta)$ in de limiet als $n \to \infty$, en hoe kunnen we op grond hiervan een (benaderend) 95% betrouwbaarheidsgebied voor θ bepalen?

Opgave 3. Veronderstel dat $(X_1, Y_1, Z_1), \ldots, (X_n, Y_n, Z_n)$ onderling onafhankelijke stochastische vectoren zijn met kansdichtheid

$$f_{\lambda,\mu}(x, y, z) = \lambda\mu y^2 e^{-\lambda xy - \mu yz - y}, \qquad x > 0, y > 0, z > 0.$$

De parameters $\lambda > 0$ en $\mu > 0$ zijn onbekend.

a. Bepaal de meest aannemelijke schatter voor (λ, μ).
b. Bepaal een voldoende vector voor (λ, μ).
c. Bepaal de zuivere schatter met minimale variantie (UMVZ) voor $g(\lambda, \mu) = 1/\mu$.
d. Bepaal de Bayes schatter voor $g(\lambda, \mu) = 1/\mu$ voor de a-priori dichtheid gegeven door $(\lambda, \mu) \mapsto e^{-\lambda-\mu}$, voor $\lambda, \mu > 0$.

Opgave 4. De stochastische grootheden $Y_1, \ldots, Y_n$ zijn onafhankelijk en Y_i is $N(x_i\theta, 1)$-verdeeld, voor bekende constanten $x_1, \ldots, x_n$ en een onbekende parameter $\theta \in \mathbb{R}$.

a. Laat zien dat de meest onderscheidende toets voor het toetsen van $H_0\colon \theta = 0$ tegen $H_1\colon \theta = 1$ by onbetrouwbaarheid α, verwerpt voor grote waarden van $\sum_{i=1}^n x_i Y_i$.
b. Wat is de kritieke waarde van deze toets voor $\alpha = 0.05$?
c. Is deze toets uniform meest onderscheidend by onbetrouwbaarheid $\alpha = 0.05$ voor $H_0\colon \theta = 0$ tegen $H_1\colon \theta > 0$? Is dit anders voor $H_1\colon \theta \neq 0$?
d. Waargenomen zijn

$$\textstyle\sum_i x_i = -1.6, \quad \sqrt{\sum_i x_i^2} = 2.7, \quad \sum_i y_i = 5.6, \quad \sqrt{\sum_i y_i^2} = 4.3, \quad \sum_i x_i y_i = 5.9.$$

Toets H_0 bij onbetrouwbaarheid 0.05 met behulp van een overschrijdingskans.

e. Laat zien dat het onderscheidend vermogen van de toets voor $\alpha = 0.05$ wordt gegeven door $\theta \mapsto 1 - \Phi(1.65 - \theta(\sum_i x_i^2)^{1/2})$, voor Φ de standaard normale verdelingsfunctie.

Staartkansen van standaard normale variabele Z.

a	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1	1.1	1.2	1.3	1.4	1.5	1.6	1.65
$P(Z \geq a)$	0.5	0.46	0.42	0.38	0.34	0.31	0.27	0.24	0.21	0.18	0.16	0.14	0.12	0.1	0.08	0.07	0.055	0.05

a	1.7	1.8	1.9	1.96	2	2.1	2.2	2.3	2.4	2.5	2.6	2.7	2.8	2.9	3	3.1	3.2	3.3	3.4
$P(Z \geq a)$	0.04	0.04	0.03	0.025	0.02	0.02	0.01	0.01	0.01	0.01	0	0	0	0	0	0	0	0	0