

## Tentamen Inleiding Statistiek 2017-2018

Toegestane hulpmiddelen: een eenvoudige rekenmachine. Geen boeken, aantekeningen, grafische rekenmachines, telefoons, smart watches of andere hulpmiddelen.

Licht al je antwoorden toe.

1. De stochastische grootheid  $X$  is verdeeld volgens de kansdichtheid

$$p_\theta(x) = \frac{2x}{\theta^2} \mathbf{1}\{0 \leq x \leq \theta\}.$$

Hierin is  $0 < \theta < 1$  een onbekende parameter. We doen slechts één waarneming,  $X$  (geen steekproef).

- Bepaal een momentenmethodeschatter van  $\theta$ .
  - Bepaal de meest aannemelijke schatter (MLE) voor  $\theta$ .
  - Welke van de twee schatters verdient de voorkeur, in termen van verwachte kwadratische fout (MSE)?
  - Laat zien dat  $X/\theta$  een pivot is.
  - Bepaal een  $(1 - \alpha) \cdot 100\%$ -betrouwbaarheidsinterval voor  $\theta$ .
  - Bepaal de Bayes-schatter voor  $\theta$  relatief aan de a-priori dichtheid  $\pi(\theta) = \mathbf{1}\{0 \leq \theta \leq 1\}$  (de homogene verdeling op  $[0, 1]$ ).
2. Beschouw de volgende dichtheid:

$$p_\theta(x) = \frac{e^{x-\theta}}{(1 + e^{x-\theta})^2}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad \theta \in \mathbb{R}.$$

De bijbehorende verdelingsfunctie (cdf) is  $F_\theta(x) = \frac{e^{x-\theta}}{1 + e^{x-\theta}}$ .

- Laat zien dat deze familie een monotone likelihoodratio in  $x$  heeft.
  - Bepaal de meest onderscheidende (lotings)toets met onbetrouwbaarheid  $\alpha_0$  voor  $H_0 : \theta = 0$  versus  $H_1 : \theta = 2$  op basis van één waarneming  $x$ , en bereken het onderscheidend vermogen (power) van de toets voor  $\alpha_0 = 0.10$ .
  - Stel we nemen  $x = 1$  waar. Wat is de  $p$ -waarde ten opzichte van de collectie toetsen uit (b)?
  - Bepaal de uniform meest onderscheidende (UMP) toets voor de hypothesen  $H_0 : \theta \leq 0$  versus  $H_1 : \theta > 0$  of bewijs dat zo'n toets niet bestaat.
3. Beschouw het volgende lineaire model:

$$Y_i = \theta x_i^2 + \varepsilon_i, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

waarbij de fouten  $\varepsilon_i$  iid zijn verdeeld met  $\mathbb{E}[\varepsilon_i] = 0$  voor alle  $i$ , en de  $x_i$  bekende getallen zijn, met  $x_i \neq 0$  voor alle  $i$ .

- Laat zien dat de kleinste kwadratenschatter van  $\theta$  gegeven wordt door  $\hat{\theta} = \frac{\sum_{i=1}^n Y_i x_i^2}{\sum_{i=1}^n x_i^4}$ .

We gaan er voor de volgende deelvragen vanuit dat de fouten  $\varepsilon_i$  iid  $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$  zijn verdeeld, met bekende  $\sigma^2$ . Het kan van pas komen om te weten dat de dichtheid van een  $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ -verdeelde variabele gegeven wordt door

$$p_{\mu, \sigma^2}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}.$$

- Laat zien dat de kleinste kwadratenschatter tevens de meest aannemelijke schatter (MLE) is voor  $\theta$ .
- Bepaal de Fisher-informatie in de hele waarneming  $Y = (Y_1, Y_2, \dots, Y_n)$ .
- Laat zien dat de kleinste kwadratenschatter voldoende is voor  $\theta$ .
- Laat zien dat de kleinste kwadratenschatter UMVZ is voor  $\theta$ .