Tentamen Inleiding Statistiek 2017-2018

Toegestane hulpmiddelen: een eenvoudige rekenmachine. Geen boeken, aantekeningen, grafische rekenmachines, telefoons, smart watches of andere hulpmiddelen.

Licht al je antwoorden toe.

1. De stochastische grootheid X is verdeeld volgens de kansdichtheid

$$p_\theta(x) = \frac{2x}{\theta^2}1\{0 \leq x \leq \theta\}.$$

   Hierin is $0 < \theta < 1$ een onbekende parameter. We doen slechts één waarneming, X (geen steekproef).

   (a) Bepaal een momentenmethodeschatter van θ.

   (b) Bepaal de meest aannemelijke schatter (MLE) voor θ.

   (c) Welke van de twee schatters verdient de voorkeur, in termen van verwachte kwadratische fout (MSE)?

   (d) Laat zien dat X/θ een pivot is.

   (e) Bepaal een $(1-\alpha) \cdot 100\%$-betrouwbaarheidsinterval voor θ.

   (f) Bepaal de Bayes-schatter voor θ relatief aan de a-priori dichtheid $\pi(\theta) = \mathbf{1}\{0 \leq \theta \leq 1\}$ (de homogene verdeling op $[0, 1]$).

2. Beschouw de volgende dichtheid:

$$p_\theta(x) = \frac{e^{x-\theta}}{(1+e^{x-\theta})^2}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad \theta \in \mathbb{R}.$$

   De bijbehorende verdelingsfunctie (cdf) is $F_\theta(x) = \frac{e^{x-\theta}}{1+e^{x-\theta}}$.

   (a) Laat zien dat deze familie een monotone likelihoodratio in x heeft.

   (b) Bepaal de meest onderscheidende (lotings)toets met onbetrouwbaarheid α_0 voor $H_0 : \theta = 0$ versus $H_1 : \theta = 2$ op basis van één waarneming x, en bereken het onderscheidend vermogen (power) van de toets voor $\alpha_0 = 0.10$.

   (c) Stel we nemen $x = 1$ waar. Wat is de p-waarde ten opzichte van de collectie toetsen uit (b)?

   (d) Bepaal de uniform meest onderscheidende (UMP) toets voor de hypothesen $H_0 : \theta \leq 0$ versus $H_1 : \theta > 0$ of bewijs dat zo'n toets niet bestaat.

3. Beschouw het volgende lineaire model:

$$Y_i = \theta x_i^2 + \varepsilon_i, \quad i = 1, 2, \ldots, n,$$

   waarbij de fouten ε_i iid zijn verdeeld met $\mathbb{E}[\varepsilon_i] = 0$ voor alle i, en de x_i bekende getallen zijn, met $x_i \neq 0$ voor alle i.

   (a) Laat zien dat de kleinste kwadratenschatter van θ gegeven wordt door $\widehat{\theta} = \frac{\sum_{i=1}^n Y_i x_i^2}{\sum_{i=1}^n x_i^4}$.

   We gaan er voor de volgende deelvragen vanuit dat de fouten ε_i iid $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$ zijn verdeeld, met bekende σ^2. Het kan van pas komen om te weten dat de dichtheid van een $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$-verdeelde variabele gegeven wordt door

$$p_{\mu,\sigma^2}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}.$$

   (b) Laat zien dat de kleinste kwadratenschatter tevens de meest aannemelijke schatter (MLE) is voor θ.

   (c) Bepaal de Fisher-informatie in de hele waarneming $Y = (Y_1, Y_2, \ldots, Y_n)$.

   (d) Laat zien dat de kleinste kwadratenschatter voldoende is voor θ.

   (e) Laat zien dat de kleinste kwadratenschatter UMVZ is voor θ.