Hertentamen KS1

Richard Gill

August 24, 2007

Dit is een openboek tentamen.

Let op: hier en daar zijn er keuze opgaven: statistiek voor herhalers en sterrenkundigen, versus voortgezet kansrekening voor "gewone" wis- en natuurkunde studenten die dit jaar voor het eerst KS1 volgen.

1) a) Beschouw de kansruimte $\Omega = \{\omega_{00}, \omega_{01}, \omega_{10}, \omega_{11}\}$. Definier de random variable X door $X(\omega_{xy}) = x$, en Y door $Y(\omega_{xy}) = y$, waarbij $x, y = 0, 1$. Definieer $p_{xy} = P(\{\omega_{xy}\})$. Waar moeten de vier getalletjes p_{xy} aan voldoen, wil P een kansmaat zijn? Wat is de verdeling van X (naam, parameter) en van Y?

   b) Laat zien dat X en Y onafhankelijk zijn dan en slechts dan als X en Y ongecorreleerd zijn (dwz, als hun covariantie nul is).

   c) Stel nu dat Ω uit 8 punten ω_{xyz} bestaat, $x, y, x = 0, 1$, en dat we op analoge manier drie random variabelen X, Y en Z definieren. Geef een tegenvoorbeeld om te laten zien dat het nu *niet meer geldt*, dat ze gesamenlijk (met hun drieën) onafhankelijk zijn, dan en slechts dan paarsgewijs ongecorreleerd.

2) De negatief binomiale verdeling is, in deze opgave, de discrete verdeling met massa-functie

$$P(X = x) = p(x; \alpha, k) = \binom{k + x - 1}{x} \alpha^k (1 - \alpha)^x, \quad x = 0, 1, \ldots,$$

voor gegeven parameters $\alpha \in [0, 1]$, en $k > 0$ *niet per se een geheel getal*. De binomiaal coefficient "uit $k + x - 1$ kies x" is hier *per definitie* gelijk aan

$$\binom{k + x - 1}{x} = \frac{\Gamma(k + x)}{\Gamma(k)x!} = \frac{(k + x - 1)(k + x - 2) \ldots (k + 1)k}{x!}$$

voor $x \geq 1$; $= 1$ voor $x = 0$.

a) Leg uit waarom, als k wel een geheel getal is, dit een goed model is voor de situatie dat U een munt werpt totdat U voor de k'de maal "kruis" ziet, en X het aantal keer voorstelt dat U op dat moment "munt" hebt gegooid.

b) In dit onderdeel mag U vanuit gaan dat $\sum_x p(x;\alpha,k)=1$ voor alle α en k. Gebruikmakend van dit feit, bereken $E(X)$ en $E(X(X-1))$. Leidt hieruit ook de variantie van X af.

c) **Sterrenkundigen**: ik heb een steekproef ter grootte n uit deze verdeling. k is bekend maar α niet. Leidt de meest-aannemelijke schatter ("maximum likelihood estimator") voor α af.

c') **Wiskundigen**: Het aantal ongelukken wat een verpleegster maakt op een ziekenhuis in een bepaalde tijdsperiode is Poisson verdeeld met verwachtingswaarde μ. De waardes van μ varieren zelf, van verpleegster tot verpleegster. Men veronderstelt dat de verdeling van μ over de verpleegsters, een gamma verdeling is. Schrijf M voor de random verwachtingswaarde van een random verpleegster. Dus, M is gamma verdeeld, en conditioneel op $M=\mu$, is X Poisson verdeeld met verwachting μ. Laat zien dat het aantal ongelukken dat een random gekozen verpleegster maakt, de negatieve binomiale verdeling heeft (dus: bereken $P(X=x)$ en kijk of je de formule voor de negatief binomiale verdeling herkent).

3) **Sterrenkundigen**: Ik doe een steekproef ter grootte n uit de uniform verdeling op het interval $[-\theta,+\theta]$. Ik wil een betrouwbaarheids interval voor θ. Wat raadt U mij aan? Hint: wat is de kansverdeling van de absolute waarde van de waarnemingen? en van de tekens (plus of min) van de waarnemingen? Zijn de tekens relevant voor onderzoek naar de waarde van θ?

3′) **Wiskundigen**: Ik heb een hele kleine pak speelkaarten: schoppen 1, 2, 3 en 4. De initiele volgorde van de kaarten is onbekend (er zijn uiteraard 4!=24 mogelijkheiden. Ik schud het pak door hem in twee stapeltjes van twee te "snijden": de bovenste helft wordt "links", de onderste helft wordt "rechts". Vervolgens neem ik om en om een kaart van elke stapel. Met kans $\frac{1}{2}$ begin ik links, met kans $\frac{1}{2}$ rechts. Voorbeeld: ik begin met 1234; de twee stapels zijn: links: 12, rechts: 34; na een keer schudden heb ik *of* 1324 *of* 3142.

Waarom is de random rij van permutaties van de vier kaarten die ik hiermee krijg een Markov keten?

Kunt u de 24 toestanden in communicerende klassen indelen en klassificeren ("transient" of "recurrent", periodiek of niet)?

Hint: teken een boom van de mogelijke toestanden op elke tijdstip, uitgaande van 1234. Let op dat bepaalde toestanden alleen na even aantal keer schudden kunnen worden bereikt. Kunnen alle 24 toestanden bereikt worden, vanuit 1234?

Kunt U wat zeggen over de volgorde van de kaarten na heel vaak schudden (even of oneven), als ik begin met de kaarten in de volgorde 1234?