Tentamen KS1

Richard Gill

June 7, 2007

Dit is een openboek tentamen

Aan het eind van sommige opgaven vindt U keuze opgaven: statistiek voor herhalers en sterrenkundigen, versus voortgezet kansrekening voor "gewone" wis- en natuurkunde studenten die dit jaar voor het eerst KS1 volgen

1) a) Stel X en Y zijn elk Bernoulli verdeeld. Laat zien dat X en Y onafhankelijk zijn dan en slechts dan als X en Y ongecorreleerd zijn (dwz, als hun covariantie nul is)

   b) En als het om X, Y en Z gaat? (zijn ze onafhankelijk dan en slechts dan ongecorreleerd, dwz hun covarianties zijn allemaal nul?)

2) De negatief binomiale verdeling is (vandaag) de discrete verdeling met massa-functie

$$P(X=x)=p(x;\alpha,k)=\binom{k+x-1}{x}\alpha^k(1-\alpha)^x, \quad x=0,1,\ldots,$$

voor gegeven parameters $\alpha \in [0,1]$, en $k>0$ *niet per se een geheel getal*[1].

   a) Leg uit waarom, als k wel een geheel getal is, dit een goed model is voor de situatie dat U een munt werpt totdat U voor de k'de maal "kruis" ziet, en X het aantal keer voorstelt dat U op dat moment "munt" hebt gegooid.

   b) In dit onderdeel mag U vanuit gaan dat $\sum_x p(x;\alpha,k)=1$ voor alle α en k. Gebruikmakend van dit feit, bereken $E(X)$ en $E(X(X-1))$. Leidt hieruit ook de variantie van X af.

[1] Binomiaal coefficient "uit $k+x-1$ kies x" is hier *per definitie* gelijk aan $\frac{\Gamma(k+x)}{\Gamma(k)x!}=\frac{(k+x-1)(k+x-2)\ldots(k+1)k}{x!}$ voor $x\geq 1$; $=1$ voor $x=0$

c) **Sterrenkundigen**: ik heb een steekproef ter grootte n uit deze verdeling. k is bekend maar α niet. Leidt de meest-aannemlijke schatter voor α af.

d) **Anderen**: Het aantal photonen wat van heel ver uit een astronomisch object waargenomen kan worden in zekere tijdsinterval is Poisson verdeeld met verwachting μ. De waardes van μ varieren zelf, van object tot object. Men veronderstelt dat de verdeling van μ een gamma verdeling is. Laat zien dat het aantal opgevangen photonen van een random waargenomen object de negatieve binomiale verdeling heeft. U mag (standaard formules) voor de kans- of moment generende functies van Poisson, negatief binomiaal, en gamma verdelingen gebruiken.

3) a) Stel X en Y zijn onafhankelijk en normaal verdeeld met verwachtingen 0 en variantie 1. Definieer $R = \sqrt{X^2 + Y^2}$. Leidt de verdeling van R af.

b) Stel dat Θ heeft een uniform verdeling op het interval $[0, 2\pi]$ en R de kansdichtheid $f(r) = r \exp(-\frac{1}{2}r^2)$, $r \geq 0$ heeft. Definieer $X = R\cos(\Theta)$, $Y = R\sin(\Theta)$. Laat zien dat X en Y dezelde gesamenlijke verdeling hebben als in onderdeel a).

4) **Astronomen**: Ik doe een steekproef ter grootte n uit de uniform verdeling op het interval $[-\theta, +\theta]$. Ik wil een betrouwbaarheids interval voor θ. Wat raadt U mij aan?

4′) **Wiskundigen**: Ik heb een hele kleine pak speelkaarten: harten 1, 2, 3 en 4. Ze staan op volgorde. Ik schud het pak door hem in twee stapeltjes van twee te "snijden": de bovenste helft wordt "links", de onderste helft wordt "rechts". Vervolgens neem ik om en om een kaart van elke stapel. Met kans $\frac{1}{2}$ begin ik links, met kans $\frac{1}{2}$ rechts. Voorbeeld: ik begin met 1234; de twee stapels zijn: links: 12, rechts: 34; na een keer schudden heb ik *of* 1324 *of* 3142. Waarom is de random rij van permutaties van de vier kaarten die ik hiermee krijg een Markov keten? Kunt u de toestanden klassificeren ("transient" of "recurrent", periodiek of niet)? Wat kunt U zeggen over de volgorde van de kaarten na heel vaak schudden? En verandert dit allemaal als ik een tendens heb om "links" te prefereren (dus: de kansen zijn niet "fifty-fifty"?