

Tentamen Kansrekening en Statistiek 1

1. Anton, Bert en Ernie zijn thuiswerkers; ze pellen garnalen en gooien die in een gezamenlijke emmer. Anton pelt per uur 100 garnalen, Bert 200 en Ernie 250. Soms vergeten ze wel eens een garnaaltje. Anton vergeet 1% van zijn garnalen te pellen, Bert 2% en Ernie 4%. Na enige tijd kiezen we een willekeurige garnaal uit de emmer en deze blijkt ongepeld te zijn. Wat is de kans dat Ernie vergeten is hem te pellen?
2. Stel X en Y zijn onafhankelijke stochastische grootheden. Gebruik de onafhankelijkheid om de variantie van het product XY te schrijven in termen van de verwachtingen en varianties van X en Y .
3. Stel X en Y zijn verdeeld volgens een gezamenlijke dichtheid gegeven door

$$f(x, y) = k(x - y), \quad 0 \leq y \leq x \leq 1.$$

- (a) Bepaal k .
 - (b) Bepaal de marginale dichtheid van X .
 - (c) Bepaal $P(X \leq 2Y)$.
4. Stel X_1, X_2, \dots, X_n zijn onderling onafhankelijke stochastische grootheden, allen met eindige verwachting μ en variantie σ^2 . Zij

$$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i, \quad \text{en} \quad S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2.$$

- (a) Bewijs dat $E(X_i - \bar{X})^2 = \text{Var}(X_i - \bar{X})$.
- (b) Bewijs dat S^2 een zuivere schatter voor σ^2 is. In het dictaat gebruikt men het resultaat van (a) in combinatie met de gelijkheid

$$X_i - \bar{X} = \frac{n-1}{n} X_i - \frac{1}{n} \sum_{j \neq i} X_j.$$

- (c) Is $S = \sqrt{S^2}$ een zuivere schatter voor σ ? Motiveer uw antwoord.

5. Als een populatie in evenwicht is, komen de genotypen AA , Aa en aa voor met kansen $p_1 = (1 - \theta)^2$, $p_2 = 2\theta(1 - \theta)$ en $p_3 = \theta^2$. Zij X_1 , X_2 en X_3 het aantal personen met de verschillende genotypen in een populatie van n individuen. Nu geldt

$$P(X_1 = n_1, X_2 = n_2, X_3 = n_3) = \frac{n!}{n_1! n_2! n_3!} p_1^{n_1} p_2^{n_2} p_3^{n_3}, \quad n = n_1 + n_2 + n_3.$$

Dit heet een multinomiale verdeling. Bepaal de meest aannemelijke (maximum likelihood) schatter van θ .

6. In 100 worpen met een munt is 49 keer kop gevallen.
 - (a) Stel een tweezijdig 95% betrouwbaarheidsinterval op voor de onbekende kans p op kop.
 - (b) Toets de nulhypothese $H_0 : p = 2/3$ versus het alternatief $H_1 : p \neq 2/3$ op significantieniveau 5%.
 - (c) Bepaal de p -waarde.