

Hertentamen Kansrekening en Statistiek 2

26 maart 2008

Bij dit examen is het gebruik van een zelfgemaakt A4 formuleblad toegestaan. Motiveer steeds je antwoord. Er zijn 5 opgaven.

1. Stel X_1, X_2, \dots, X_n is een steekproef uit de gamma verdeling met parameters α en λ . Deze kansverdeling heeft dichtheid

$$f(x) = \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\lambda x}, \quad x \geq 0$$

waarbij de gamma functie $\Gamma(x)$ is gegeven door

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} dt, \quad x > 0.$$

- (a) Laat zien dat $EX = \alpha/\lambda$ en $E(X^2) = \alpha(\alpha + 1)/\lambda^2$. Je kunt de moment genererende functie gebruiken, of het feit dat $\Gamma(x + 1) = x\Gamma(x)$.
- (b) Bepaal de momenten methode schatters van λ en α .

2. Stel we nemen een enkele stochastische grootheid X waar, die verdeeld is volgens de binomiale verdeling met parameters n en p . Deze parameters zijn onbekend, maar we weten wel dat $n = 2$ of 3 , en we weten dat $p = 1/2$ of $1/3$.

- (a) Geef alle bij mogelijke uitkomsten de mogelijke kansen.
- (b) Geef de meest aannemelijke (maximum likelihood) schatter voor n en p .

3. Stel X_1, X_2, \dots, X_n zijn onderling onafhankelijk verdeeld met dichtheid

$$f_\theta(x) = \frac{1}{2\theta} \exp\left(-\frac{|x|}{\theta}\right).$$

- (a) Bepaal de meest aannemelijke schatter van θ .
- (b) Bepaal de asymptotische variantie van deze schatter.

4. De oplosbaarheid van een chemische stof wordt bij verschillende temperaturen bepaald. Bij elke temperatuur doen we één of twee waarnemingen. We vinden

temperatuur (celcius)	8	10	11	13	15
oplosbaarheid bij de 1e meting	3,4	5,2	5,4	6,9	8,0
oplosbaarheid bij de 2e meting			6,0		8,8

- (a) We veronderstellen dat er een lineair verband bestaat tussen de oplosbaarheid en de temperatuur. Geef de kleinste kwadraten schatters voor dit verband.
- (b) Geef een schatting van de standaard afwijking van de geschatte parameters.
5. Als een populatie in evenwicht is, komen de genotypen AA , Aa en aa voor met kansen $(1 - \theta)^2$, $2\theta(1 - \theta)$ en θ^2 , respectievelijk. In een steekproef van 190 personen vinden we de volgende aantallen

AA	Aa	aa
10	68	112

- (a) Bereken de meest aannemelijke schatter voor θ .
- (b) Bereken de (gegeneraliseerde) log likelihood ratio toestingsgrootte $\log(\Lambda)$.
- (c) Voor grote steekproeven, is $-2 \log(\Lambda)$ bij benadering chi-kwadraat verdeeld. Voer met behulp van de onderstaande tabel de likelihood ratio toets uit voor $H_0 : \theta = 1/2$ versus $H_1 : \theta \neq 1/2$. Kies significantie niveau $\alpha = 5\%$.

vrijheidsgraden	$\chi_{0.9}^2$	$\chi_{0.95}^2$	$\chi_{0.99}^2$
1	2,71	3,84	6,63
2	4,61	5,99	9,21
3	6,25	7,81	11,34
4	7,78	9,49	13,28
5	9,24	11,07	15,09
10	15,99	18,31	23,21
20	28,41	31,41	37,57