Tentamen Kansrekening en Statistiek 2

24 januari 2008

Bij dit examen is het gebruik van een zelfgemaakt A4 formuleblad toegestaan. Motiveer steeds je antwoord. Er zijn 6 opgaven.

1. Stel X heeft de binomiale verdeling met parameters n en p.
   (a) Bepaal de momenten methode schatter van de "odds" $p/(1-p)$.
   (b) Is deze schatter zuiver? Waarom?
   (c) Is deze schatter consistent? Waarom?
   (d) Bepaal de meest aannemelijke (maximum likelihood) schatter van $p/(1-p)$.

2. Stel $T_1, T_2, \ldots, T_n$ zijn de levensduren (in hele uren) van n gloeilampen. We nemen aan dat deze levensduren onderling onafhankelijk verdeeld zijn volgens de geometrische verdeling met onbekende parameter p. Dat wil zeggen

$$P(T_1 = k) = (1-p)^{k-1}p, \qquad k = 1, 2, \ldots$$

   Van KS1 weten we nog dat geldt

$$P(T_1 \leq k) = 1 - (1-p)^k, \qquad k = 1, 2, \ldots$$

   Zij c een gegeven positief geheel getal. We observeren niet $T_1, T_2, \ldots, T_n$ maar

$$X_i = \min(T_i, c) \quad \text{en} \quad \Delta_i = \begin{cases} 1 & \text{als } T_i \leq c \\ 0 & \text{als } T_i > c \end{cases}$$

   (a) Geef de likelihoodfunctie van de waarnemingen $(X_1, \Delta_1), (X_2, \Delta_2), \ldots, (X_n, \Delta_n)$.
   (b) Bepaal de meest aannemelijke schatter van p.

3. Stel $X_1, X_2, \ldots, X_n$ zijn onderling onafhankelijk verdeeld met dichtheid

$$f_\theta(x) = (\theta + 1)x^\theta, \qquad 0 \leq x \leq 1.$$

   (a) Bepaal de meest aannemelijke schatter van θ.
   (b) Bepaal de asymptotische variantie van deze schatter.

4. Stel $X_1, X_2, \ldots, X_n$ zijn onderling onafhankelijk verdeeld volgens de dubbele exonentiële verdeling met dichtheid

$$f_\lambda(x) = \frac{\lambda}{2} e^{-\lambda|x|}.$$

   (a) Stel $\lambda_0 < \lambda_1$. Geef de likelihood ratio toets voor

$$H_0 : \lambda = \lambda_0 \quad \text{vs} \quad H_1 : \lambda = \lambda_1$$

   (b) Is deze toets uniform meest onderscheidend (uniformly most powerful) voor het alternatief $H_1 : \lambda > \lambda_0$.

5. Stel X is verdeeld volgens de uniforme verdeling op het interval $[0, \theta]$. We willen de nulhypothese $H_0 : \theta = 2$ toetsen versus het alternatief $H_1 : \theta > 2$. We besluiten H_0 te verwerpen als $X \geq 1.9$.

   (a) Wat is het significantieniveau van deze toets? Met andere woorden, wat is de kans dat we H_0 onterecht verwerpen?

   (b) Stel we nemen waar $X = 1.77$. Wat is de p waarde van deze waarneming?

   (c) Bepaal op basis van de waarneming $X = 1.77$ een 95% betrouwbaarheids-interval voor θ.

6. Beschouw het volgende lineaire model

$$Y_i = \beta x_i + \varepsilon_i, \quad i = 1, 2, \ldots, n,$$

waarbij de fouten onafhankelijk zijn. Stel dat ε_i normaal verdeeld is met verwachting 0 en variantie $x_i \sigma^2$. Merk op dat de fouten verschillende varianties hebben! We nemen aan dat alle x_i positief zijn.

   (a) Bepaal de kleinste kwadraten schatter van β.

   (b) $Z_i = Y_i / \sqrt{x_i}$ volgt wel een standaard lineair model. Bepaal de kleinste kwadraten schatter van β in dit model.

   (c) Welke schatter voor β zou je gebruiken? Waarom?