29 maart 2006, 10-13 uur

Hertentamen Kansrekening en Statistiek 2

1. Stel X heeft de binomiale verdeling met parameters n en p. Laat zien dat de likelihood ratio statistiek voor $H_0 : p = 1/2$ versus $A : p \neq 1/2$ equivalent is met $|2X - n|$.

2. Stel het paar (X, Y) is bivariaat normaal verdeeld. Laat zien dat $X+Y$ en $X-Y$ onafhankelijk zijn dan en slechts dan als de variantie van X gelijk is aan de variantie van Y.

3. Beschouw het lineaire model
$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + U_i, \quad i = 1, 2, \ldots, 10$$
waarin de U_i onafhankelijk zijn met verwachting 0 en variantie σ^2. Stel dat we de punten $x_1, x_2, \ldots, x_{10}$ zelf mogen kiezen in het interval $[-1, 1]$. Hoe moeten we ze kiezen om de variantie van de schatter $\hat{\beta}_1$ zo klein mogelijk te krijgen?

4. Stel X_1 en X_2 zijn onderling onafhankelijk en beide uniform verdeeld op het interval $[0, 1]$. Zij $Y = \min(X_1, X_2)$ en $Z = \max(X_1, X_2)$. Nu geldt voor de gezamelijke verdelingsfunctie van Y en Z
$$F(y, z) = P(Y < y,\ Z < z) = 2P(X_1 < X_2,\ X_1 < y,\ X_2 < z).$$
   (a) Laat zien dat de gezamelijke dichtheid van Y en Z wordt gegeven door
$$f(y, z) = \begin{cases} 2, & \text{als } 0 < y \leq z < 1 \\ 0, & \text{anders.} \end{cases}$$
   (b) Bepaal de marginale dichtheid van Y.
   (c) Bepaal de voorwaardelijke dichtheid van Z gegeven $Y = y$.
   (d) Bepaal de voorwaardelijke verwachting van Z gegeven $Y = y$.

5. Stel X is een discrete stochastische grootheid met kansgenererende functie
$$G(s) = \frac{1 + s - s^6 - s^7}{12 - 12s}, \quad s \neq 1,$$
en $G(1) = 1$.
   (a) Bepaal $P(X = 0)$ en $P(X = 1)$.
   (b) Bepaal $P(X = 100)$. Hint: $\sum_{k=0}^{\infty} s^k = 1/(1 - s)$.

6. Stel dat een Markov keten op een eindige toestandsruimte een symmetrische transitie matrix heeft, zodat $p_{ij} = p_{ji}$. Stel dat de keten een stationaire verdeling heeft. Laat zien dat deze stationaire verdeling gelijk is aan de discrete uniforme verdeling op de toestandsruimte.