13 januari 2006, 10:00-13:00 uur

# Tentamen Kansrekening en Statistiek 2

1. De normaal verdeelde stochastische grootheden $X_1, X_2, \ldots, X_n$ volgen een *autoregressief model* als geldt
$$X_i = \theta X_{i-1} + \varepsilon_i, \quad i = 1, 2, \ldots, n,$$
waarbij $X_0 = 0$ en $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$ onafhankelijk $N(0, \sigma^2)$ verdeeld zijn. Onder dit model is de dichtheid van $X_1, X_2, \ldots, X_n$ gegeven door
$$f_\theta(x_1, x_2, \ldots, x_n, \theta) = \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{n/2}} \exp\left\{ \frac{-\sum_{i=1}^n (x_i - \theta x_{i-1})^2}{2\sigma^2} \right\}.$$
   (a) Bepaal de maximum likelihood schatter van $\theta$.
   (b) Laat zien dat de likelihood ratio statistiek voor $H_0 : \theta = 0$ (onafhankelijkheid) versus $A : \theta \neq 0$ equivalent is met $(\sum_{i=2}^n X_i X_{i-1})^2 / \sum_{i=1}^{n-1} X_i^2$.

2. Beschouw het lineaire model
$$Y_i = \beta x_i + U_i, \quad i = 1, 2, \ldots, n$$
waarbij de $U_i$ onafhankelijk zijn, allen met verwachting 0 en variantie $\sigma^2$.
   (a) Bepaal de kleinste kwadraten schatter $\hat{\beta}$ van $\beta$.
   (b) Bepaal de variantie van $\hat{\beta}$.

3. Stel $X$ en $Y$ hebben gezamelijke dichtheid
$$f(x, y) = 2e^{-x}e^{-y}, \quad 0 < x < y < \infty.$$
   (a) Bepaal de voorwaardelijke dichtheid van $Y$ gegeven $X = x$.
   (b) Bepaal de voorwaardelijke verwachting $E(Y|X = x)$.

4. Zij $N$ het aantal koppen in $n$ worpen met een munt met kop-kans $p$. Vervolgens werpen we de munt nog $N$ keer. Zij $X$ het aantal koppen in deze laatste $N$ worpen.
   (a) Bepaal de kansgenererende functie van $X$.
   (b) Bepaal de verwachting en variantie van $X$.

5. Beschouw een Markov keten $(X_n)_{n\geq 0}$ op de toestandsruimte $S = \{1, 2, 3, 4\}$ en transitie matrix
$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$$
   (a) Maak een plaatje van de toestandsruimte en geef met pijltjes de mogelijke transities aan.
   (b) Is de keten reducibel?
   (c) Bepaal de stationaire verdeling.