

Tentamen Kansrekening en Statistiek II

4 april 2007

Bij dit examen is het gebruik van een zelfgemaakt formuleblad toegestaan.

Een antwoord alleen is *niet* voldoende: er dient een berekening, toelichting en/of motivatie aanwezig te zijn. Dit alles goed leesbaar en in goed Nederlands.

1. Een mobiele telefoon provider modeleert de tijdsduur T van een telefoongesprek met een exponentiële verdeling, dus de dichtheid van T wordt gegeven door

$$f_\lambda(t) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda t} & \text{als } t \geq 0, \\ 0 & \text{als } t < 0, \end{cases}$$

voor zekere $\lambda > 0$. Een statisticus die is ingehuurd door de provider om hun model te analyseren, beweert echter dat een beter model voor T zou zijn om de dichtheid te geven door

$$g_\beta(t) = \begin{cases} \beta(1+t)^{-(1+\beta)} & \text{als } t \geq 0, \\ 0 & \text{als } t < 0, \end{cases}$$

voor zekere $\beta > 0$.

- a. Stel we hebben een steekproef van gespreksduren $T_1, T_2, \dots, T_n$. Bepaal de loglikelihood ratio test statistic L voor de toets

$$H_0 = \{f_\lambda : \lambda > 0\} \quad \text{versus} \quad H_1 = \{g_\beta : \beta > 0\}$$

- b. Beschrijf precies maar bondig hoe je simulatie kan gebruiken om een kritieke waarde te vinden voor L , bij een significantie niveau α .

2. Gegeven is het lineaire model

$$Y = \beta x + U$$

waarbij $\beta \in \mathbb{R}$, $Y, x \in \mathbb{R}^n$ en $U \in \mathbb{R}^n$ een toevalsvector is, die voldoet aan de Gauss-Markov condities

- $E(U) = 0$
- $C(U) = \sigma^2 I$.

waarbij σ^2 een onbekende constante is. De kleinste kwadraten schatter van de parameter β is gegeven door

$$\hat{\beta} = (x'x)^{-1}x'Y$$

Stel nu dat we nog een andere lineaire schatter hebben, dat wil zeggen, we kiezen een $T \in \mathbb{R}^n$ en definiëren

$$\tilde{\beta} = T'Y.$$

Stel dat $\tilde{\beta}$ ook zuiver is, zodat $E(\tilde{\beta}) = \beta$.

- a. Laat zien dat $T'x = 1$.
- b. Laat zien dat $\text{Cov}(\hat{\beta}, \hat{\beta} - \tilde{\beta}) = 0$.
- c. Laat zien dat de variantie van $\tilde{\beta}$ tenminste zo groot is als die van de kleinste kwadraten schatter.
3. Op elke vrijdag-avond voert de politie van Nergenshuizen een alcohol-controle uit op de lokale Dorpsstraat. Laat p de kans zijn, dat een bestuurder een te hoog alcohol-percentages in zijn of haar bloed heeft, en laat het aantal bestuurders N dat op zo'n avond gestopt wordt om getest te worden een Poisson-verdeelde stochast zijn, met parameter $\lambda > 0$.

Wat is de kans dat van de gestopte personen er k zullen zijn, die te diep in het glaasje gekeken hebben?

4. Op elk tijdstip n (met $n = 0, 1, 2, \dots$) bevat een vaas precies N knikkers. Sommige knikkers zullen wit zijn, sommige zullen rood zijn, en de rest zijn zwart (hoewel het soms kan voorkomen dat alle knikkers wit zijn, of allemaal zwart, of allemaal rood, etc.). Op ieder tijdstip n werpen we met een zuivere dobbelsteen: als we een even aantal ogen werpen, dan trekken we geheel willekeurig een knikker uit de vaas, en doen we een *witte* knikker terug in de vaas. Als we drie of vijf ogen werpen met de dobbelsteen, dan trekken we geheel willekeurig een knikker uit de vaas, en doen we een *zwarte* knikker terug in de vaas. Tenslotte, als we één werpen met de dobbelsteen, dan trekken we een willekeurige knikker uit de vaas, en vervangen we deze door een *rode* knikker. Laat X_n het aantal witte knikkers zijn dat “nu” in de vaas zijn (dus op tijdstip n , na het werpen van de dobbelsteen en het vervangen van een willekeurig getrokken knikker). Het is duidelijk dat $\{X_n; n \geq 0\}$ een Markov keten is.

- Bepaal de overgangskansen $p_{i,j} = P(X_{n+1} = j | X_n = i)$ voor $i = 0, 1, \dots, N$, en $j = 0, 1, \dots, N$.
- Wat zijn de equivalentieklassen? Is de keten irreducibel? Wat is de periode $d(i)$ voor $i = 0, 1, \dots, N$?
- Laat in dit onderdeel $N = 2$. Wat is dan de stationaire verdeling π ? Wat is—op de lange duur—het verwachte aantal witte knikkers in de vaas?
- Gebruik uw antwoord uit onderdeel (c) om de stationaire verdeling in het algemene geval te raden (als uw antwoord uit onderdeel (c) u niet helpt probeer dan ook eens $N = 4$ om te zien wat er gebeurt). Toon vervolgens aan dat dit inderdaad **de** stationaire verdeling is.

5. Beschouw een irreducibele aperiodieke Markovketen $(X_n)_{n \geq 0}$ met n -steps overgangskansen $p_{ij}^{(n)}$ en stationaire verdeling $\pi = (\pi_i)$ op een eindige toestandsruimte S . Toon dan aan dat voor alle $i, j \in S$ er geldt dat:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(X_n = i, X_{2n} = j) = \pi_j \pi_i.$$

6. Uw koelkast kan in twee toestanden verkeren, “aan” = 1 en “uit” = 0. De gemiddelde lengte van een “aan” periode is 15 minuten, die van een “uit” periode 2 uur. Aangenomen wordt dat het gaat om een continue tijd markovketen.

- Bepaal de Q -matrix (druk uw eenheden uit in uren).
- Bereken de stationaire verdeling.¹

¹Deze stationaire verdeling kunt u ook zonder de Q -matrix bepalen, dus als u niet uit onderdeel (a) komt: geen nood!