

Tentamen Kansrekening en Statistiek 2

29 augustus 2007, 14:00 - 17:00 uur.

Bij dit examen is het gebruik van een zelfgemaakt formuleblad toegestaan.

1. Laat $(X_n)_{n \geq 0}$ een discrete Markov keten zijn met toestandruimte $S = \{1, 2, \dots, m\}$. Definieer voor $n = 0, 1, 2, \dots$ de stochasten Y_n door $Y_n = X_{2n}$.

- (a) Toon aan dat $(Y_n)_{n \geq 0}$ ook een discrete tijd Markov keten is met toestandruimte S door te laten zien dat

$$P(Y_n = j \mid Y_{n-1} = i, Y_{n-2} = y_{n-2}, \dots, Y_0 = y_0) = P(Y_n = j \mid Y_{n-1} = i).$$

Wat is de matrix van overgangskansen van deze Markov keten?

- (b) Laat zien, dat als $(Y_n)_{n \geq 0}$ irreducibel is, dat $(X_n)_{n \geq 0}$ dat dan ook is. Geldt het omgekeerde ook? Geef een bewijs of een tegenvoorbeeld.

2. Stel de stochastische grootte X heeft een kansverdeling met dichtheid

$$f(x) = xe^{-x}, \quad x \geq 0$$

- (a) Bepaal de moment genererende functie. Hint: Gebruik de substitutie methode om de integraal uit te rekenen.
- (b) Laat zien dat X dezelfde verdeling heeft als de som van twee onafhankelijke exponentieel verdeelde stochastische grootheden, elk met verwachting 1.

3. Beschouw een taxi-standplaats waar dag en nacht taxi's arriveren volgens een Poisson proces met een intensiteit (rate) $\lambda = 1$ taxi per minuut. Klanten arriveren volgens een Poisson-proces proces met $\mu = 2$ klanten per minuut. Een taxi zal altijd op klanten wachten, maar klanten die bij een lege taxi-standplaats aankomen nemen de trein.

- (a) Wat is het verwachte aantal taxi's dat staat te wachten bij de standplaats?
- (b) Welk gedeelte van de klanten gaat verloren?
- (c) De centrale wil meer taxi's gaan inzetten om de aankomst intensiteit te verhogen tot $\lambda = 2$ taxi's per minuut. Is dit een goed idee? Waarom (niet)?

4. Beschouw het volgende lineaire model

$$Y_i = \beta x_i + \varepsilon_i, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

waarbij de fouten onafhankelijk zijn. Stel dat ε_i normaal verdeeld is met verwachting 0 en variantie $x_i\sigma^2$. Merk op dat dit model niet voldoet aan de Gauss-Markov condities. We nemen aan dat alle x_i positief zijn.

- (a) Bepaal de kleinste kwadraten schatter van β .
- (b) $Z_i = Y_i/\sqrt{x_i}$ volgt wel een standaard lineair model. Bepaal de kleinste kwadraten schatter van β in dit model.
- (c) Welke schatter voor β zou u gebruiken? Waarom?

5. Laat X een discrete stochastische grootte zijn. We toetsen

$$H_0 : X \text{ bezit de geometrische verdeling met parameter } p = 0.05$$

versus

$$H_1 : X \text{ bezit de Poisson verdeling met parameter } \lambda = 0.95$$

Onder de nulhypothese geldt dus

$$P(X = k) = p(1 - p)^k, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

en onder het alternatief geldt

$$P(X = k) = \lambda^k e^{-\lambda} / k!, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

- (a) Bepaal de Neyman-Pearson toets. Kies significantie niveau $\alpha = 10\%$.
- (b) Bereken het onderscheidend vermogen (power) van deze toets in H_1 .