Tentamen Kansrekening en Statistiek 2

25 januari 2007

Bij dit examen is het gebruik van een zelfgemaakt formuleblad toegestaan.

1. Een bedrijf beschikt over drie identieke machines. Deze bezitten een vitaal, kostbaar en kwetsbaar onderdeel dat volgens een of andere kansverdeling stukgaat. De kapotte onderdelen worden vervangen volgens het volgende systeem: aan het begin van elke week worden er zoveel besteld als er op dat moment stuk zijn. De levertijd is precies één week. Zij X_n het aantal werkende machines aan het begin van de n^{de} week; en zij U_n het aantal machines dat uitvalt gedurende de n^{de} week (doordat bovengenoemd vitaal onderdeel stuk gaat). Het vervangingssysteem bewerkstelligt dat
$$X_{n+1} = 3 - U_n,$$
en dat $(X_n)_{n=1}^{\infty}$ een Markovketen is.

   Stel dat de machines uitvallen met de volgende kansverdeling:
$$P(U_n = j \mid X_n = i) = \frac{1}{i+1}, \qquad j = 0, 1, \ldots, i, \quad \text{voor } i = 0, 1, 2, 3.$$

   (a) Geef de overgangsmatrix van de Markovketen $(X_n)_{n=1}^{\infty}$.

   (b) Bereken de limiet verdeling van Markovketen $(X_n)_{n=1}^{\infty}$.

   (c) Wat is op de lange duur het gemiddelde aantal werkende machines?

2. Zij X een stochastische grootheid met de $N(0, \sigma^2)$ verdeling, met dichtheid
$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\, e^{-x^2/2\sigma^2}.$$

   (a) Bepaal de moment genererende functie $M_X(t) = E\left[e^{tX}\right]$.

   (b) Laat zien dat de oneven momenten van X nul zijn, en dat voor de even momenten geldt
$$E(X^{2n}) = \frac{(2n)!\sigma^{2n}}{2^n(n!)}.$$

3. Vrachtwagens arriveren bij een pakhuis volgens een Poissonproces met intensiteit 1 per 50 minuten. De lostijd per vrachtauto is exponentiëel verdeeld met gemiddelde 40 minuten.

   (a) Stel dat er in het pakhuis één ontladingszone is. Bereken het gemiddeld aantal vrachtauto's bij deze zone.

   (b) Stel dat er twee ontladingszones zijn. Wat is dan de kans dat beide zones bezet zijn?

4. Men kan op twee manieren een geheel getal trekken tussen 1 en 12. Met een twaalfzijdige dobbelsteen (een dodecahedron), of met twee reguliere zeszijdige dobbelstenen. Zij X de uitkomst van de trekking. We willen toetsen

$$H_0: \text{ twaalfzijdig} \qquad \text{tegen} \qquad H_1: \text{ 2 keer zeszijdig.}$$

   (a) Geef de waarde van de Neyman-Pearson toetsingsgrootheid bij elke mogelijke uitkomst.

   (b) We kiezen een significantie van $\alpha = 0.2$. Bepaal de (randomized) testfunctie behorende bij de Neyman-Pearson toets.

   (c) Geef het onderscheidend vermogen (power) van deze toets als gegeven is dat 2 zeszijdige dobbelstenen zijn gebruikt.

5. Gegeven is het volgende lineaire model:

$$Y_i = \beta_1 x_{1i} + \beta_2 x_{2i} + U_i, \qquad i = 1, 2, \ldots, n.$$

   Hier zijn x_1 en x_2 regressoren en $\beta = (\beta_1, \beta_2)^t \in \mathbb{R}^2$ een onbekende parametervector. We veronderstellen dat de U_i allen onafhankelijk verdeeld zijn volgens de normale verdeling met verwachting nul, en variantie σ^2.

   (a) Stel $\hat{\beta}$ is de kleinste kwadratenschatter van β. Bewijs dat x_1 en x_2 orthogonaal zijn (loodrecht op elkaar staan), dan en slechts dan als $\hat{\beta}_1$ en $\hat{\beta}_2$ onafhankelijk zijn.

   (b) Stel we mogen x_1 en x_2 zelf kiezen, mits er geldt dat $\|x_1\| = \|x_2\| = 1$. Laat zien dat de minimale variantie voor zowel $\hat{\beta}_1$ als $\hat{\beta}_2$ onder deze voorwaarde, wordt aangenomen als we x_1 en x_2 orthogonaal kiezen.