

Lineaire algebra I (wiskundigen)

Hertentamen, maandag 7 maart, 2016

Geen rekenmachines, dictaat of aantekeningen. Motiveer elk antwoord!

Opgave 1 (7 punten). Voor elk reëel getal $a \in \mathbb{R}$ bekijken we het systeem

$$\begin{cases} ax_1 + 3x_3 = a \\ 2x_1 + ax_2 + 4x_3 = 1 \\ -x_2 + 2x_3 = a \end{cases}$$

van lineaire vergelijkingen in x_1, x_2 en x_3 .

- (a) Voor welke $a \in \mathbb{R}$ zijn er geen oplossingen?
- (b) Beschrijf de volledige oplossingsverzameling voor $a = 1$.

Opgave 2 (8 punten). Gegeven is de matrix

$$M = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

- (a) Bepaal de eigenwaarden van M en een basis voor de bijbehorende eigenruimten.
- (b) Bepaal een diagonaalmatrix D en een inverteerbare matrix P zodanig dat $M = PDP^{-1}$.
- (c) Bereken M^{2016} . [Je mag hierbij uitdrukkingen zoals 17^{2016} laten staan.]

Opgave 3 (7 punten). Zij $U \subset \mathbb{R}^3$ de lineaire deelruimte opgespannen door de vectoren

$$u_1 = (2, 1, 0), \quad u_2 = (4, 1, 1) \quad \text{en} \quad u_3 = (0, 1, -1).$$

[Een ander woord voor 'opgespannen' is 'voortgebracht'; Engels: 'spanned'.]

Zij $V \subset \mathbb{R}^3$ het vlak gegeven door

$$V = \{ (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1 = 2x_2 + 2x_3 \}$$

en zij a een normaal van V . Geef een basis voor de doorsnede $U \cap (a^\perp)$.

Op de volgende pagina staan nog meer opgaven

Opgave 4 (8 punten). Met behulp van de 2×3 -matrix

$$N = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

definiëren we de lineaire afbeelding

$$T: \text{Mat}(3 \times 2, \mathbb{R}) \rightarrow \text{Mat}(2 \times 2, \mathbb{R})$$

door $T(A) = NA$ voor alle $A \in \text{Mat}(3 \times 2, \mathbb{R})$.

- Bepaal een basis voor de kern van T .
- Is T surjectief?

Opgave 5 (7 punten). Zij V de vectorruimte van alle reële polynomen van graad hooguit 2016. Stel $f_1: V \rightarrow \mathbb{R}^{2016}$ en $f_2: V \rightarrow \mathbb{R}^{2016}$ zijn twee lineaire afbeeldingen van V naar \mathbb{R}^{2016} . Bewijs dat er een polynoom $p \in V$ bestaat waarvoor geldt $f_1(p) = f_2(p)$.

$$\text{Niet } p = 0$$

Opgave 6 (8 punten). Gegeven zijn twee elementen $a, b \in \mathbb{R}^{2016}$, beide ongelijk aan 0. Zij $f: \mathbb{R}^{2016} \rightarrow \mathbb{R}^{2016}$ de afbeelding gegeven door $f(x) = \langle a, x \rangle \cdot b$ voor alle $x \in \mathbb{R}^{2016}$.

- Laat zien dat er geldt $\dim(\ker f) = 2015$.
- Laat zien dat f diagonaliseerbaar is dan en slechts dan als a en b niet loodrecht op elkaar staan.