

# Lineaire algebra I (wiskundigen)

Tentamen, donderdag 22 januari, 2015

Geen rekenmachines, dictaat of aantekeningen. Motiveer elk antwoord!

**Opgave 1** (9 punten). Voor alle reële getallen  $c \in \mathbb{R}$  definiëren we de matrix  $A_c$  als

$$A_c = \begin{pmatrix} 1 & c & 1 \\ 1-c & 2 & -2 \\ 2 & -1 & c+2 \end{pmatrix}$$

en we definiëren de afbeelding  $g_c: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  door

$$g_c(x) = A_c \cdot x$$

voor alle  $x \in \mathbb{R}^3$ .

- (a) Voor welke  $c \in \mathbb{R}$  is  $g_c$  surjectief?
- (b) Is  $A_c$  inverteerbaar voor  $c = -2$ ? Zo nee, geef aan waarom niet; zo ja, geef de inverse.

**Opgave 2** (9 punten). Zij  $B$  de matrix

$$B = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

- (a) Bepaal alle eigenwaarden van  $B$  en bepaal voor elke eigenwaarde een basis voor de bijbehorende eigenruimte.
- (b) Bepaal een diagonaalmatrix  $D$  en een inverteerbare matrix  $Q$  zodanig dat geldt
$$D = Q^{-1}BQ.$$
- (c) Bereken  $B^{2015}$ . In je antwoord mag je uitdrukkingen zoals  $17^{2015}$  laten staan.

**Opgave 3** (7 punten). Beschouw de reële matrix

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Geef voortbrengers voor  $(\text{im } C)^\perp$ .

Op de volgende pagina staan nog meer opgaven

**Opgave 4** (12 punten). Zij  $V$  de reële vectorruimte van alle  $3 \times 3$  magische vierkanten zoals we tijdens het college meerdere malen gezien hebben<sup>1</sup>. De magische vierkanten

$$M_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad M_2 = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{en} \quad M_3 = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

vormen een basis  $B = (M_1, M_2, M_3)$  voor  $V$ . [Je mag dit zonder bewijs gebruiken.]

Zij  $\rho: V \rightarrow V$  de lineaire afbeelding die elk magisch vierkant roteert over  $90^\circ$ , dus  $\rho$  stuurt

$$\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & j \end{bmatrix} \quad \text{naar} \quad \begin{bmatrix} c & f & j \\ b & e & h \\ a & d & g \end{bmatrix}$$

Zij  $\gamma: V \rightarrow V$  de lineaire afbeelding die het magisch vierkant

$$\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & j \end{bmatrix} \quad \text{stuurt naar} \quad \begin{bmatrix} e & e & e \\ e & e & e \\ e & e & e \end{bmatrix}$$

en definieer  $\sigma = \rho + \gamma$ .

- Geef de matrices  $[\rho]_B^B$ ,  $[\gamma]_B^B$  en  $[\sigma]_B^B$ .
  - Bepaal de karakteristieke polynomen van  $\rho$ ,  $\gamma$  en  $\sigma$ .
  - Bepaal een niet-nul eigenvector voor elk van de afbeeldingen  $\rho$ ,  $\gamma$  en  $\sigma$ .
  - Bepaal de rangen van  $\rho$ ,  $\gamma$  en  $\sigma$ .
- (d) Is  $\sigma$  diagonaliseerbaar?

**Opgave 5** (8 punten). Stel  $V$  en  $W$  zijn eindig-dimensionale reële vectorruimtes. Neem aan dat

$$f: V \rightarrow W \quad \text{en} \quad g: W \rightarrow V$$

lineaire afbeeldingen zijn zodanig dat de samenstelling  $g \circ f$  gelijk is aan de identiteit  $\text{id}_V$  op  $V$ , dus voor alle  $v \in V$  geldt  $g(f(v)) = v$ . Bewijs dat het beeld van  $f$  (d.w.z.  $\text{im } f$ ) en de kern van  $g$  (d.w.z.  $\text{ker } g$ ) complementaire ruimtes in  $W$  zijn.

<sup>1</sup>Dus  $V$  bestaat uit alle vierkanten van  $3 \times 3$  reële getallen waarvan de drie rijen, de drie kolommen en de twee diagonalen allemaal dezelfde som hebben; de scalaire vermenigvuldiging en de optelling is componentsgewijs gedefinieerd.