

# Tentamen Lineaire Algebra 1.

Donderdag 20 augustus 2009, 10.00-13.00.

---

Versie voor studenten *wiskunde*.

Het gebruik van een rekenmachine is niet toegestaan.

Motiveer ieder antwoord met een berekening of een redenering.

---

1. Beschouw het stelsel vergelijkingen

$$\begin{array}{rcl} ax_1 + 2x_2 - x_3 & = & b \\ 2x_1 + ax_2 & = & 4 \\ 5x_1 + ax_2 - x_3 & = & -b \end{array}$$

- Schrijf het stelsel in de vorm  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$  waarbij  $A$  een  $3 \times 3$ -matrix is en waarbij  $\mathbf{x}$  en  $\mathbf{b}$  vectoren zijn. (1 pt)
  - Ga na voor welke reële getallen  $a$  en  $b$  het stelsel precies één oplossing heeft. (5 pt)
  - Voor welke getallen  $a$  en  $b$  heeft het stelsel meer dan één oplossing? (5 pt)
- Laat nu  $a = -3$  en  $b = -2$ .
- Bepaal  $A^{-1}$ . (6 pt)
  - Los het stelsel op. (3 pt)

2. Gegeven is de matrix  $A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ -3 & 0 & 5 \end{pmatrix}$ .

- Bepaal de eigenwaarden en eigenvectoren van  $A$ . (9 pt)
- Bepaal een inverteerbare matrix  $B$  en een diagonalizeerbare matrix  $D$  zodanig dat  $B^{-1}AB = D$ . (2 pt)
- Toon aan dat er een uniek reëel getal  $\alpha$  bestaat zodanig dat de matrices  $\alpha^n A^n$  naar een matrix  $C \neq O$  convergeren (m.a.w.  $C = \lim_{n \rightarrow \infty} \alpha^n A^n$ ). Geef tevens de waarde van  $\alpha$ . (5 pt)

\*\*\* Z.O.Z \*\*\*

3. In  $\mathbb{R}^4$  wordt het 2-vlak  $V$  gegeven door de vergelijkingen

$$\begin{cases} x_1 - 2x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_4 = 0 \end{cases}$$

- a) Bepaal een orthonormale basis van  $V$ . (8 pt)
- b) Bepaal een basis van  $V^\perp$ . (3 pt)
- c) Bereken de projectie van de vector  $(1, 0, 0, 1)$  op  $V$ . (4 pt)

4. Zij  $n$  een positief geheel getal en zij  $P(n)$  de vectorruimte van polynomen met reële coëfficiënten van graad ten hoogste  $n$ . Zij

$$T: P(n) \rightarrow \mathbb{R}^2$$

de afbeelding gegeven door  $T(f) = (f(0), f(1))$ .

- a) Wat is de dimensie van  $P(n)$ ? (4pt)
- b) Laat zien dat  $T$  een lineaire afbeelding is. (4pt)
- c) Wat is de dimensie van de kern van  $T$ ? (6pt)

5. Laat  $M = \text{Mat}(2 \times 2, \mathbb{R})$  de vectorruimte van  $2 \times 2$ -matrices met reële coëfficiënten zijn.  $S \subset M$  is de deelverzameling bestaande uit de symmetrische  $2 \times 2$ -matrices. Verder is  $J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$  en  $K = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ .

- a. Toon aan dat  $S$  een lineaire deelruimte van  $M$  is en geef een basis van  $S$  aan. (4 pt)
- b. Bepaal de coördinaten van  $K$  t.o.v. de in onderdeel (a) gekozen basis. (3 pt)

De lineaire afbeelding  $T: M \rightarrow M$  wordt gegeven door

$$T: X \rightarrow -JXJ.$$

- c. Laat zien: als  $X \in S$ , dan  $T(X) \in S$ . (3 pt)  
Vanwege onderdeel (c) kunnen we  $T$  ook opvatten als een afbeelding van  $S$  naar  $S$ . We noemen deze afbeelding de restrictie van  $T$  tot  $S$  en schrijven hiervoor  $T|_S$ .
- d. Bepaal nu de matrix van  $T|_S$  t.o.v. de basis van onderdeel (a). (5 pt)

**\*\*\* EINDE TENTAMEN \*\*\***