Tentamen lineaire algebra 2
19 april 2018, 14:00 – 17:00
zalen 408, 412

Dit is *geen* openboektentamen. Alleen niet-programmeerbare rekenmachines zijn toegestaan. Bewijs je antwoorden. In totaal kun je 45 punten halen. Nummer je pagina's. Als je de antwoorden niet op de logische volgorde opschrijft, vermeld dan duidelijk waar welk antwoord staat.

Opgave 1. (8 punten) Gegeven is de matrix

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & -3 \end{pmatrix}.$$

Bepaal een orthogonale matrix Q en een diagonaalmatrix D zodanig dat er geldt $A = Q^\top DQ$.

Opgave 2. (10 punten) In deze opgave is steeds de vraag of er een reële $n \times n$-matrix A bestaat met de gevraagde eigenschap. Geef zo'n matrix A of bewijs dat die niet bestaat. Laat I_n de $n \times n$-identiteitsmatrix zijn.

(a) $n = 4$ en $A^2 = 0$ en $\operatorname{rk} A = 1$;
(b) $n = 4$ en $A^2 = 0$ en $\operatorname{rk} A = 2$;
(c) $n = 4$ en $A^2 = 0$ en $\operatorname{rk} A = 3$;
(d) $n = 4$ en $\operatorname{rk} A = 2$ en $\operatorname{rk}(A - I_4) = 1$;
(e) $n = 4$ en $\operatorname{rk} A = 2$ en $\operatorname{rk}(A - I_4) = 2$;
(f) $n = 4$ en $\operatorname{rk} A = 2$ en $\operatorname{rk}(A - I_4) = 3$;
(g) $n = 6$ en $\operatorname{rk}(A - 2I_6) = 4$ en $\operatorname{rk}\big((A-2I_6)^2\big) = 3$ en $\operatorname{rk}\big((A-2I_6)^3\big) = 1$;
(h) $n = 6$ en $\operatorname{rk}(A - 2I_6) = 4$ en $\operatorname{rk}\big((A-2I_6)^2\big) = 3$ en $\operatorname{rk}\big((A-2I_6)^3\big) = 2$;
(i) $n = 6$ en $\operatorname{rk}(A - 2I_6) = 4$ en $\operatorname{rk}\big((A-2I_6)^2\big) = 3$ en $\operatorname{rk}\big((A-2I_6)^3\big) = 3$;
(j) $n = 6$ en $\operatorname{rk}(A - 2I_6) = 4$ en $\operatorname{rk}\big((A-2I_6)^2\big) = 3$ en $\operatorname{rk}\big((A-2I_6)^3\big) = 4$.

Opgave 3. (9 punten) Zij $\varphi\colon \mathbf{R}^3 \times \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$ de bilineaire afbeelding die het paar $(x, y) \in \mathbf{R}^3 \times \mathbf{R}^3$ stuurt naar $y^\top Ax$ met

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

(a) Laat zien dat φ een inproduct is.
(b) Geef een basis voor $\mathbf{R}^3$ die orthonormaal is ten opzichte van dit inproduct.
(c) Zij $V \subset \mathbf{R}^3$ het vlak voortgebracht door $e_1 = (1, 0, 0)$ en $e_2 = (0, 1, 0)$. Zij $\pi\colon \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ de orthogonale projectie op V ten opzichte van dit inproduct. [Dus als $v + v' = x \in \mathbf{R}^3$ met $v \in V$ en $v' \in V^\perp$, dan is $\pi(x) = v$.]
Zij M de matrix waarvoor voor alle $x \in \mathbf{R}^3$ geldt $\pi(x) = Mx$.
Is M symmetrisch?

Opgaven 4 en 5 staan op de volgende pagina

Opgave 4. (9 punten) Zij V een complexe inproductruimte met het inproduct geschreven als $\langle \_, \_ \rangle$. Voor elke $a, b \in V$ definiëren we de lineaire afbeelding $f_{a,b}\colon V \to V$ gegeven door

$$f_{a,b}(x) = x - \langle x, b \rangle \cdot a.$$

(a) Laat zien dat voor alle $a \in V$ de afbeelding $f_{a,a}$ zelf-geadjungeerd is.

(b) Laat $a, b \in V$ willekeurige elementen zijn. Omdat V niet per se eindige dimensie heeft, is a priori het bestaan van de geadjungeerde $f_{a,b}$ niet gegarandeerd. Laat zien dat $f_{a,b}$ (toch) een geadjungeerde heeft door een expliciete uitdrukking voor $f^*_{a,b}(x)$ te geven in termen van a, b en x.

[Het Engels voor *(zelf-)geadjungeerd* is *(self) adjoint*.]

Opgave 5. (9 punten)

(a) Zij $A \in \mathrm{Mat}(n, \mathbf{C})$ een inverteerbare complexe $n \times n$ matrix waarvoor A^2 diagonaliseerbaar is. Laat zien dat ook A diagonaliseerbaar is.

(b) Geldt hetzelfde voor alle niet-inverteerbare matrices?