Tentamen - Numerieke Wiskunde

Dinsdag 2 juni 2020 - thuis - 10.15-13.15

- Vermeld op ieder vel **duidelijk leesbaar** niet alleen uw naam (met voornaam en alle voorletters), maar ook uw studentnummer.
- Elk antwoord dient gemotiveerd te worden met een berekening, redenering of verwijzing naar de theorie.
- Gebruik van een **niet-grafische** rekenmachine is toegestaan.
- U mag altijd het resultaat van een (deel)-opgave als bekend veronderstellen bij een volgende opgave!
- U mag in het Nederlands of in het Engels antwoorden.

Dit tentamen bestaat uit 4 opgaven.

Vergeet de achterkant niet!

Opgave 1 In deze opgave gaan we het beginwaardeprobleem $y' = f(t, y)$ voor $t > 0$ numeriek oplossen met de methode van Ralston:

$$\overline{w}_{n+3/4} = w_n + \frac{3}{4}\Delta t\big(f(t_n, w_n)\big), \qquad w_{n+1} = w_n + \frac{1}{3}\Delta t\Big(f(t_n, w_n) + 2f(t_n + \frac{3}{4}\Delta t, \overline{w}_{n+3/4})\Big).$$

(a) Laat voor algemene gladde $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ zien dat de locale afbreekfout van de orde $\mathcal{O}((\Delta t)^2)$ is.

(b) Laat met de test vergelijking zien dat de amplificatiefactor gegeven wordt door $Q(\lambda\Delta t) = 1 + \lambda\Delta t + \frac{1}{2}(\lambda\Delta t)^2$.

Beschouw nu de niet-lineaire vergelijking

$$\begin{cases} y_1' = 4y_1 - 2y_1^2 - 2y_1y_2, \\ \\ y_2' = -2y_2 + 2y_1y_2. \end{cases}$$

(c) Bepaal de maximale stapgrootte Δt zodanig dat ons schema stabiel is in de buurt van $(y_1, y_2) = (1, 1)$. *Hint: je kunt de nulpunten van het uiteindelijke vierdegraads polynoom dat je krijgt 'raden'.*

(d) Leg uit dat ons schema convergent is voor de in (c) gevonden tijdstappen, mits de startwaarde in de buurt van $(1, 1)$ ligt.

Opgave 2

(a) Vind het kubische Hermite polynoom voor de functie e^x met steunpunten $\{0, 1\}$.

(b) Laat zien dat de natuurlijke kubische spline s voor de functie e^x met steunpunten $\{0, 1, 2\}$ voldoet aan $s''(1) = \frac{3}{2}e^2 + \frac{3}{2} - 3e$.

(c) Bepaal de in (b) beschreven spline. *NB: Je mag (maar dit hoeft niet) alle coefficienten uitdrukken in termen van $s''(1)$.*

Vergeet de achterkant niet!

Opgave 3 Beschouw de matrix

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix} .$$

(a) Heeft A een Cholesky decompositie?

(b) Geef een schatting van het conditiegetal van A^{-1} zonder A^{-1} te bepalen.
Hint: Je mag de Stelling van Gershgorin gebruiken.

(c) Beschouw nu het lineaire systeem $Ax = b$ met $b = (6, -13, 14)$ voor de onbekende $x \in \mathbb{R}^3$. Geef de formule voor de Jacobi iteratie en bereken de eerste iteratie stap $x^{(1)}$ voor $x^{(0)} = (0, 0, 0)$.

(d) Convergeert de Jacobi iteratie van (c) voor elke $x^{(0)} \in \mathbb{R}^3$?

(e) Bereken het karakteristieke polynoom $f(x) = \det(A - x \cdot Id)$ van A. Geef de formule voor de Newton-Raphson iteratie waarmee je een benadering van de eigenwaarden van A kunt uitrekenen.

(f) Beschouw de Quasi-Newton iteratie

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)^2}{f(x_n) - f(x_n - f(x_n))} , \qquad n \in \mathbb{N}_0 ,$$

voor een functie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die twee keer continu differentieerbaar is en een enkelvoudig nulpunt in x^* heeft (dwz $f'(x^*) \neq 0$). Laat zien dat er een omgeving $D \subseteq \mathbb{R}$ van x^* bestaat, zodat de Quasi-Newton iteratie voor $x^{(0)} \in D$ naar x^* convergeert.

Opgave 4 Laat $N \geq 4$ zijn en $0 = x_0 < x_1 < \ldots < x_N < x_{N+1} = 1$ een discretisatie van het interval $[0, 1]$ met equidistante steunpunten $x_k = kh, k = 0, \ldots, N + 1, h = \frac{1}{N+1}$ en $x_{N+2} = 1 + h$.

(a) Toon aan dat voor elke functie $v \in C^4([0, 1 + h])$ er een constante $C > 0$ bestaat (die niet van h afhangt, maar wel van v) zodat

$$\left| \frac{v(x_{k+2}) - 3v(x_{k+1}) + 3v(x_k) - v(x_{k-1})}{h^3} - v'''(x_k) \right| \leq Ch , \qquad k = 1, \ldots, N .$$

(b) Beschouw nu voor $y \in C^4((0, 1)) \cap C^1([0, 1])$ de vergelijking

$$y''' = f , \qquad y(0) = 0,\ y(1) = 0,\ y'(1) = 0 .$$

Gebruik de eindige differentie benadering ("finite difference approximation") van (a) om een lineair systeem $Au = b$ te bepalen wiens oplossing u de waarden $y(x_k), k = 1, \ldots, N$ benadert.