Tentamen Numerieke Wiskunde voor LAV-1
maandag 23 mei 2005, 15.30 - 18.30 uur

(i) Uw antwoorden behoren goed gemotiveerd te worden.
(ii) Vermeld boven uw werk uw achternaam en alle voorletters, uw collegekaartnummer en de datum.

---

1. Beschouw het beginwaardeprobleem

$$(1) \qquad \begin{cases} U_1'(t) = 2U_2(t) - U_1(t) + 2, \quad t > 1, \\ U_2'(t) = t\,U_2(t) + U_1(t) - 3, \quad t > 1, \\ U_1(1) = 2, \quad U_2(1) = 1. \end{cases}$$

(a) Definieer $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $u_0 \in \mathbb{R}^2$ en $t_0 \in \mathbb{R}$ zó dat (1) equivalent is met het stelsel

$$\begin{cases} U'(t) = f(t, U(t)), \quad t > t_0, \\ U(t_0) = u_0. \end{cases}$$

We benaderen $U(3)$ met behulp van de Runge-Kutta methode met Runge-Kutta matrix

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(b) Bepaal met de methode M en $h = 2$ een benadering van $U(3)$.

De benadering van $U(3)$, verkregen door herhaalde toepassing van methode M met stapgrootte h, noteren we als $T(h)$ met $T(h) = \begin{pmatrix} T_1(h) \\ T_2(h) \end{pmatrix}$. Gegeven is de volgende tabel met waarden $T_1(h)$.

h	$T_1(h)$
$\frac{1}{9}$	35.0180
$\frac{1}{27}$	37.1050
$\frac{1}{81}$	37.3909

(c) Schat met behulp van de waarden uit bovenstaande tabel de orde van de Runge-Kutta methode M.

2. Voor een gegeven waarde r met $r \neq 0$ bekijken we de berekening van de waarde

$$y = r - \sin(r).$$

(a) Bereken het conditiegetal van y m.b.t. r, uitgedrukt in r.

Zij $\widetilde{r}$ een benadering van r.
Ter berekening van y is een algoritme A voorhanden. De operaties bij deze algoritme worden uitgevoerd in drijvende punt aritmetiek met grondtal $B = 10$ en aantal cijfers t. Met SIN noteren we de machine-versie van de functie 'sin'. Algoritme A luidt als volgt:

$$\text{A} \;:\; \widetilde{y} = \widetilde{r} \ominus \text{SIN}(\widetilde{r}).$$

(b) Bepaal de conditiegetallen, uitgedrukt in r, behorend bij algoritme A.

Veronderstel dat $r \approx 0.12$, dat $\left|\dfrac{\widetilde{r} - r}{r}\right| \leq 5 \cdot 10^{-4}$ en dat $\widetilde{r}$ representeerbaar is.

(c) Hoe groot moet het aantal cijfers t van de representatie minstens zijn opdat voor de met deze algoritme verkregen benadering $\widetilde{y}$ geldt: $\left|\dfrac{\widetilde{y} - y}{y}\right| \lesssim 2 \cdot 10^{-3}$.

3. Gezocht zij de waarde Y. Berekend is een aantal benaderingen $y(h)$ voor een aantal waarden van h.

h	$y(h)$
$\frac{1}{2}$	0.9058
$\frac{1}{4}$	1.7222
$\frac{1}{8}$	2.2175

Uit theoretische analyse is bekend dat

$$y(h) = Y + \gamma^{(1)}h + \gamma^{(2)}h^3 + \gamma^{(3)}h^4 + \mathcal{O}(h^6)\,.$$

Rond bij de berekeningen in (a) en (b) af op vier cijfers na de decimale punt.

(a) Bepaal met behulp van extrapolatie naar $h = 0$ een zo nauwkeurig mogelijke benadering van Y.

Nadere analyse van $y(h)$ leert dat $\gamma^{(1)} = -4$, zodat we nu weten dat

$$y(h) + 4\,h = Y + \gamma^{(2)}h^3 + \gamma^{(3)}h^4 + \mathcal{O}(h^6)\,.$$

(b) Bepaal, door gebruik te maken van deze nieuwe informatie, opnieuw een zo nauwkeurig mogelijke benadering van Y.

4. De functie f is gedefinieerd op het interval $[-2, 4]$. In de volgende tabel staan enkele functiewaarden vermeld.

i	t_i	$f(t_i)$
1	-2	0
2	0	4
3	1	-3
4	4	12

Zij P het polynoom van orde 4 zó dat $P(t_i) = f(t_i)$ voor $i = 1, 2, 3, 4$.

(a) Bepaal $P(3)$ met de methode van Neville.

(b) Bepaal met behulp van de interpolatieformule van Newton een representatie van het polynoom P.

Het is bekend dat voor $k = 1, 2, \ldots$ geldt dat $-\dfrac{32}{k} \leq f^{(k)}(t) \leq \dfrac{40}{k}$ voor alle $t \in [-2, 4]$.

(c) Bepaal een zo nauwkeurig mogelijke insluiting van $f(3)$.