Tentamen OPTIMALISERING (TW2020)

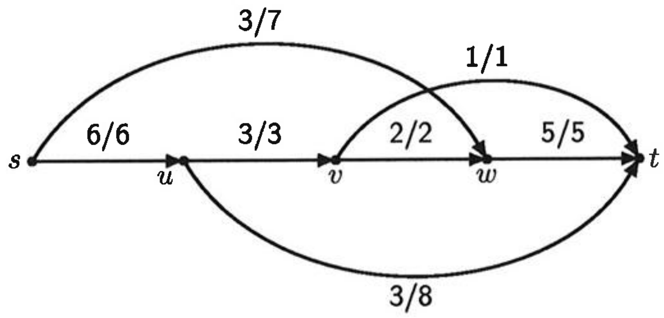
20 januari 2017

Dit tentamen bestaat uit 6 vragen verdeeld over 2 pagina's. In totaal zijn er 70 punten te verdienen. Je cijfer wordt bepaald door het totaal aantal behaalde punten door 7 te delen. Je mag bij dit tentamen alleen schrijfgerei en een niet-grafische rekenmachine gebruiken. Aantekeningen, boeken, dictaten, grafische rekenmachines, computers, telefoons, smart-watches e.d. mogen **niet** gebruikt worden. Succes!

---

1. (10 points) Beschouw het volgende scheduling probleem. Er zijn n jobs en m machines waarop de jobs uitgevoerd kunnen worden. Als job i uitgevoerd wordt op machine j dan duurt dit p_{ij} minuten. Sommige jobs hebben extra onderdelen nodig om uitgevoerd te kunnen worden. Voor elk onderdeel o is de verzameling $N_o = \{i \mid \text{job } i \text{ heeft onderdeel } o \text{ nodig}\}$ gegeven. Omdat het verplaatsen van de onderdelen tussen machines te tijdrovend is, moeten jobs die hetzelfde onderdeel nodig hebben op dezelfde machine uitgevoerd worden. Het doel is om elke job aan één van de machines toe te wijzen, zodanig dat de totale productietijd (d.w.z. de som van de productietijden per machine) minimaal is. Formuleer dit probleem als een ILP probleem.

2. Beschouw het onderstaande netwerk waarin bij elke pijl de huidige stroom en de capaciteit zijn aangegeven.



   (a) (5 points) Vind een maximale s-t stroom in dit netwerk door, uitgaande van de gegeven stroom, één iteratie van het Ford-Fulkerson algoritme toe te passen.

   (b) (5 points) Geef een s-t snede van minimale capaciteit in dit netwerk en beargumenteer dat de gevonden stroom en snede optimaal zijn.

3. (10 points) Gegeven zijn een graaf $G = (V, E)$ met een lengte $\ell(e)$ voor elke lijn $e \in E$. Stel er bestaat een lijn $e^* \in E$ zodanig dat $\ell(e^*) < \ell(e)$ voor alle $e \in E \setminus \{e^*\}$. Bewijs dat elke minimum opspannende boom van G de lijn e^* bevat.

4. Beschouw het onderstaande ILP probleem.

$$\begin{array}{lrl} \min & -2x_1 - x_2 & \\ o.d.v. & 2x_1 + 8x_2 & \leq 17 \\ & x_1 & \leq 3 \\ & x_1, x_2 \geq 0 & \\ & x_1, x_2 \in \mathbb{Z} & \end{array}$$

   (a) (6 points) Vind een optimale oplossing van de LP-relaxatie met behulp van de Simplex methode.

   (b) (6 points) Vind de Gomory snede behorende bij de eerste rij (niet de doelfunctierij) van het Simplex eindtableaux verkregen bij vraag (a).

   (c) (6 points) Voeg de bij (b) gevonden Gomory snede toe aan het optimale Simplex tableaux uit (a) en los de nieuwe LP-relaxatie op met behulp van de **duale** Simplex methode. Als je bij (b) geen snede gevonden hebt, voeg dan de restrictie $-\frac{1}{4}s_1 - \frac{1}{2}s_2 \leq -\frac{1}{2}$ toe.

5. (10 points) Bewijs dat het onderstaande probleem RIJ COVER NP-volledig is.

   RIJ COVER
   Gegeven: een geheel getal k en een $n \times m$ matrix gevuld met enen en nullen.
   Beslis: kun je door hooguit k rijen uit de matrix te verwijderen ervoor zorgen dat er per kolom maximaal één één overblijft?

   Je mag hierbij gebruiken dat het onderstaande probleem VERTEX COVER NP-moeilijk is.

   VERTEX COVER
   Gegeven: een geheel getal p en een graaf $G = (V, E)$.
   Beslis: is er een deelverzameling $U \subseteq V$ bestaande uit hoogstens p punten, zodanig dat elke lijn uit E incident is met tenminste één punt uit U?

6. De onderstaande tabel geeft de reistijden (in minuten) met de auto tussen vier Nederlandse steden.

	Amsterdam	Utrecht	Amersfoort	Nijmegen
Amsterdam	-	50	52	90
Utrecht	50	-	32	66
Amersfoort	52	32	-	62
Nijmegen	90	66	62	-

   (a) (4 points) Vind een opspannende boom die deze vier steden verbindt en minimaal is met betrekking tot de gegeven reistijden. Gebruik hiervoor het algoritme van **Prim-Dijkstra**.

   (b) (4 points) Gebruik het **boomalgoritme** om een tour te vinden die elk van deze vier steden precies één keer bezoekt en eindigt in de stad waar hij begint.

   (c) (2 points) Onder welke voorwaarde op de afstandsmatrix heeft het boomalgoritme een constante prestatiegarantie? Geef ook de constante.

   (d) (2 points) Leg uit waarom de prestatiegarantie uit vraag (c) geldt (onder de genoemde voorwaarde).

Einde tentamen