

Tentamen Introduction to Algebraic Topology

15 januari 2018, 10:00 – 13:00

Beantwoord de volgende vragen.

Motiveer uw antwoorden. Wees hierbij beknopt maar volledig.

Formuleer de stellingen die u gebruikt.

Voor $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ laten we $S^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : \|x\| = 1\} \subset \mathbb{R}^{n+1}$ met de deelruimtetopologie.

Opgave 1. (i) Formuleer de stelling van Van Kampen.

(ii) Zij $n \in \mathbb{Z}_{\geq 2}$. Leid uit de stelling van Van Kampen af dat de fundamentealgroep van S^n triviaal is.

Opgave 2. Zij Y een topologische ruimte en G een eindige ondergroep van de groep $\text{Aut}(Y)$ van homeomorfismen van Y naar Y .

(i) Neem aan dat Y Hausdorff is, en dat G vrij werkt¹ op Y . Laat zien dat de werking van G op Y even is. Betrek in uw antwoord de definitie van een even werking.

We kunnen S^3 realiseren als de deelruimte $Y = \{(w_1, w_2) \in \mathbb{C}^2 : |w_1|^2 + |w_2|^2 = 1\}$ van $\mathbb{C}^2$. Zij $\mu \cong \mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$ de groep van 7-de eenheidswortels in $\mathbb{C}^*$. We kunnen μ vereenzelvigen met een ondergroep G van $\text{Aut}(Y)$ door $\zeta \in \mu$ te laten corresponderen met het homeomorfisme $(w_1, w_2) \mapsto (\zeta w_1, \zeta w_2)$.

(ii) Laat zien dat G even werkt op Y , en bepaal de fundamentealgroep van de quotiëntruimte Y/G .

Opgave 3. Laat X, Y topologische ruimten zijn en $f: X \rightarrow Y$ een continue afbeelding. Laat $p \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$.

(i) Geef de definitie van de groep $H_p(X)$ en van het homomorfisme $f_*: H_p(X) \rightarrow H_p(Y)$.

(ii) Zij $A \subset X$ een deelruimte met inclusieafbeelding $i: A \rightarrow X$. Laat $r: X \rightarrow A$ een retractie zijn, dat wil zeggen r is continu en $r \circ i = \text{id}_A$. Laat zien dat i_* injectief is.

Laat nu $X = S^2 \times S^3$. Zij P een punt op S^3 en laat $A = S^2 \times \{P\} \subset X$.

(iii) Geef een retractie $r: X \rightarrow A$.

(iv) Laat zien dat $X = S^2 \times S^3$ en S^5 niet homotopie-equivalent zijn.

Opgave 4. Bereken van elke $\zeta \in \mu \cong \mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$ als in Opgave 2 de graad, waarbij ζ gezien wordt als een element van $\text{Aut}(S^3)$.

¹Een linkswerking van een groep G op een verzameling X heet vrij als voor alle $g \in G$ en voor alle $x \in X$ geldt: $g \cdot x = x \Rightarrow g = e$. Hier is e het neutrale element van G .