TENTAMEN TOPOLOGIE

Maandag 15 januari 2018, 14:00–17:00

Literatuur, aantekeningen en elektronische hulpmiddelen zijn niet toegestaan.

Geef volledige argumenten en geef duidelijk aan wat je gebruikt.

Let op: het cijfer voor dit tentamen is $\min\{10, 1 + (\text{aantal punten})/10\}$, waarbij het aantal punten gebaseerd is op de **vijf** opgaven waarvoor je de meeste punten hebt.

(15 pt) **1.** In $\mathbf{R}$ (met de euclidische metriek) bekijken we de deelruimten

$$X = [0, \infty), \qquad Y = \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}, \qquad Z = \{0\} \cup \{n^{-1} \mid n \in \mathbf{Z}, n > 0\}.$$

Geef (zonder bewijs) voor elk van deze deelruimten aan welke van de volgende eigenschappen hij heeft: begrensd, gesloten, compact, samenhangend, dicht in $\mathbf{R}$.

(18 pt) **2.** Zijn $(V_1, \|\ \|_1)$ en $(V_2, \|\ \|_2)$ twee genormeerde $\mathbf{R}$-vectorruimten. We bekijken de productverzameling $V = V_1 \times V_2$. Je mag gebruiken dat V een $\mathbf{R}$-vectorruimte is onder de optelling en scalaire vermenigvuldiging gedefinieerd door

$$(v_1, v_2) + (w_1, w_2) = (v_1 + w_1, v_2 + w_2) \quad \text{voor alle } v_1, w_1 \in V_1 \text{ en } v_2, w_2 \in V_2,$$
$$c(v_1, v_2) = (cv_1, cv_2) \quad \text{voor alle } c \in \mathbf{R},\ v_1 \in V_1,\ v_2 \in V_2.$$

Bekijk de functie $\|\ \|\colon V \longrightarrow \mathbf{R}$ gedefinieerd door $\|(v_1, v_2)\| = \|v_1\|_1 + \|v_2\|_2$.

(a) Laat zien dat $\|\ \|$ een norm op V is.

(b) Stel dat $(V_1, \|\ \|_1)$ en $(V_2, \|\ \|_2)$ Banachruimten zijn. Laat zien dat $(V, \|\ \|)$ een Banachruimte is.

(20 pt) **3.** Voor elke eindige deelverzameling $S \subset \mathbf{Z} \setminus \{0\}$ definiëren we een deelverzameling $U_S \subseteq \mathbf{Z}$ door $U_S = \mathbf{Z} \setminus S$. Zij $\mathcal{T}$ de collectie deelverzamelingen van $\mathbf{Z}$ gedefinieerd door $\mathcal{T} = \{\emptyset\} \cup \{U_S \mid S \subset \mathbf{Z} \setminus \{0\} \text{ eindig}\}$.

(a) Laat zien dat $\mathcal{T}$ een topologie op $\mathbf{Z}$ is.

(b) Laat zien dat $(\mathbf{Z}, \mathcal{T})$ compact is.

(18 pt) **4.** Zij X een topologische ruimte, zij $\sim$ een equivalentierelatie op X, en zij $Q = X/{\sim}$ de quotiëntruimte.

(a) Stel dat X discreet is. Bewijs dat Q discreet is.

(b) Stel dat X samenhangend is. Is Q noodzakelijk samenhangend? Geef een bewijs of een tegenvoorbeeld.

(c) Geef een voorbeeld waarin X een Hausdorffruimte is, maar Q niet.

(15 pt) **5.** (a) Bewijs dat elke weg in $\mathbf{Q}$ constant is ($\mathbf{Q}$ heeft de deelruimtetopologie van $\mathbf{R}$.)

(b) Zij X een topologische ruimte, en zijn $f, g\colon X \to \mathbf{Q}$ twee continue afbeeldingen. Stel dat f en g homotoop zijn. Bewijs dat f en g gelijk zijn.

(20 pt) **6.** We bekijken de afbeelding $p\colon \mathbf{C} \to \mathbf{C} \setminus \{0\}$ gedefinieerd door $p(z) = e^{2\pi i z}$.

(a) Bewijs dat p een overdekkingsafbeelding is. (*Hint:* $e^z = e^w \iff z - w \in 2\pi i\mathbf{Z}$.)

(b) Zij $\gamma\colon [0,1] \to \mathbf{C} \setminus \{0\}$ de lus met basispunt $x_0 = 1$ gegeven door $\gamma(s) = e^{2\pi i s}$. Bepaal $Y = p^{-1}\{x_0\}$, en bepaal voor elke $y \in Y$ de lift $\tilde{\gamma}_y$ van γ (met betrekking tot de overdekkingsafbeelding p) met beginpunt y.

Succes!