Tentamen Topologie, 18 Augustus 2006 10:00–13:00

Geef steeds een volledige uitwerking, eventueel met verwijzingen naar stellingen uit het boek.

1. Laat d een metriek zijn op een eindige verzameling X. Bewijs dat d de discrete topologie geeft op X.
2. Is er een continue surjectie van $\mathbf{R}^2$ naar de Fles van Klein? En van de Fles van Klein naar de $\mathbf{R}^2$?
3. Laat X de ruimte $\mathbb{R}^3$ zijn met aftelbaar oneindig veel rechte lijnen weggelaten. Laat zien dat X samenhangend is.
4. Deze opgave gaat over quotientruimten.
   (i) Welke ruimte krijg je als je de rand van een Möbiusband identificeert tot een punt? Kies uit een bol, torus, fles van Klein, en het projectieve vlak, en motiveer je antwoord.
   (ii) Definieer een equivalentierelatie $\sim$ op de eenheidsschijf $X = \{x \in \mathbb{C} : |x| \leq 1\}$ door
   $$x \sim y \iff (|x| = 1 \iff |y| = 1).$$
   Laat zien dat de quotientruimte $X/\sim$ uit slechts eindig veel elementen bestaat.
   (iii) Geef alle open verzamelingen van de quotientruimte $X/\sim$.
5. Laat $X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2\colon |x| \leq 2, |y| \leq 2, x^2 + y^2 \geq 1\}$. Laat zien dat X homotopie-equivalent is met een cirkel.