Tentamen Topologie, 19 Juni 2006 10:00–13:00

Geef steeds een volledige uitwerking, eventueel met verwijzingen naar stellingen uit het boek.

1. Bestaat er een continue surjectie van de 3-dimensionale Eucidische ruimte $\mathbb{R}^3$ naar de 3-dimensionale bol $S^3 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4\colon\ x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 1\}$? En van S^3 naar $\mathbb{R}^3$?

2. Laat $D = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ de discrete ruimte van cijfers zijn. Beschouw de productruimte $X = \prod_{i=1}^{\infty} D = D \times D \times \cdots$ van rijtjes cijfers.
   (*i*) Laat zien dat er een continue afbeelding $f\colon\ X \to [0, 1]$ is die een rijtje $(d_i)_{i=1}^{\infty}$ stuurt naar $\sum_i d_i 10^{-i}$. Is f injectief?
   (*ii*) Wat zijn de samenhangscomponenten van X?
   (*iii*) Is f een topologische quotientafbeelding (*identification map*)?

3. Laat X het eindig gesloten assenkruis zijn: $X = \{(x, y) \in [-1, 1]^2 : x = 0 \text{ of } y = 0\}$. Stel dat $f\colon\ X \to X$ een continue afbeelding is. Het doel van deze opgave is te laten zien dat f een vast punt heeft. Beschouw de injectie $i\colon\ [-1, 1] \to X$ gegeven door $x \mapsto (x, 0)$, en de projectie $\pi\colon\ X \to [-1, 1]$ gegeven door $(x, y) \mapsto x$. Laat g de samengestelde afbeelding $[-1, 1] \xrightarrow{i} X \xrightarrow{f} X \xrightarrow{\pi} [-1, 1]$ zijn.
   (*i*) Bewijs dat g een vast punt heeft, d.w.z. dat er een $x \in [-1, 1]$ is met $g(x) = x$.
   (*ii*) Laat zien dat $(x, 0)$ een vast punt van f is als x een vast punt is van g met $x \neq 0$.
   (*iii*) Laat zien dat f een vast punt heeft.

4. Laat X de quotientruimte zijn van het vlak die we krijgen door twee verschillende punten te identificeren. Wat is de fundamentaalgroep van X?