# UITWERKING TENTAMEN TOPOLOGIE, 02-06-2008

1. Voor $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ definieer $V_{(a,b)} := \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq a \ , \ y \geq b \}$ .

   (a) (0.5 punt) Bewijs dat $\mathcal{B} := \{ V_{(a,b)} \mid (a,b) \in \mathbb{R}^2 \}$ de basis van een topologie $\mathcal{T}_V$ in $\mathbb{R}^2$ is.

   (b) (1.5 punten) Is de topologische ruimte $(\mathbb{R}^2, \mathcal{T}_V)$

      i. Hausdorffs,

      ii. compact,

      iii. 1-aftelbaar?

   **Oplossing:** (a) Wegens $\mathbb{R}^2 = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} V_{(n,n)}$ en $V_{(a,b)} \cap V_{(c,d)} = V_{(\max(a,c),\max(b,d))} \in \mathcal{B}$ is $\mathcal{B}$ volgens Propositie 1.3.3 basis van een topologie $\mathcal{T}_V$.

   (b) i. Laat $U \in \mathcal{T}_V$ open zijn met $(0,0) \in U$ , dan is er volgens (a) een $V_{(a,b)}$ met $(0,0) \in V_{(a,b)}$ waaruit volgt $a \leq 0$ , $b \leq 0$ en dus $(1,1) \in V_{(a,b)} \subset U$ . $(0,0)$ en $(1,1)$ hebben dus geen disjunkte open omgevingen, d.w.z. $(\mathbb{R}^2, \mathcal{T}_V)$ is niet Hausdorffs.

   (b) ii. De open overdekking $\mathbb{R}^2 = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} V_{(n,n)}$ heeft geen eindige deeloverdekking, dus is $(\mathbb{R}^2, \mathcal{T}_V)$ niet compact.

   (b) iii. $\{V_{(a,b)}\}$ is een omgevingsbasis van $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ .

2. (2 punten) Laat $X$ een topologische ruimte zijn, en beschouw $X \times X$ met de producttopologie. Bewijs dat de volgende twee uitspraken equivalent zijn.

   (a) $(X, \mathcal{T})$ is een Hausdorffruimte.

   (b) De diagonaal $\{ (x,x) \subset X \times X \mid x \in X \}$ is gesloten in $X \times X$.

   **Oplossing:** Notatie: $\Delta := \{ (x,x) \subset X \times X \mid x \in X \}$

   (a) $\Rightarrow$ (b) Voor $(x,y) \in (X \times X) \setminus \Delta$ geldt $x \neq y$ , dus zijn er $U, V \in \mathcal{T}$ met $x \in U$ , $y \in V$ , $U \cap V = \emptyset$ ; hieruit volgt $(x,y) \in U \times V \subset (X \times X) \setminus \Delta$ . Omdat $U \times V$ open is in de producttopologie betekent dit dat ook $(X \times X) \setminus \Delta$ open en $\Delta$ dus gesloten is.

   (b) $\Rightarrow$ (a) Voor $x \neq y$ in $X$ geldt $(x,y) \in (X \times X) \setminus \Delta$ ; dit is open omdat $\Delta$ gesloten is. Volgens de definitie van de producttopologie zijn er $U, V \in \mathcal{T}$ met $(x,y) \in U \times V \subset (X \times X) \setminus \Delta$ . $x \in U$ , $y \in V$ . Hieruit volgt $x \in U$ , $y \in V$ , $U \cap V = \emptyset$ .

3. (1.5 punten) Laat $X$ een rijcompacte ruimte zijn en $f : X \longrightarrow Y$ een surjectieve continue afbeelding. Bewijs dat $Y$ rijcompact is.
   **Hint:** Gebruik het feit dat een continue afbeelding rijcontinu is.

   **Oplossing:** Laat $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ een puntrij in $Y$ zijn; omdat $f$ surjectief is bestaat er een puntrij $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in $X$ zodat $f(x_n) = y_n$ voor alle $n \in \mathbb{N}$ . Omdat $X$ rijcompact is heeft $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ een convergente deelrij: $\lim\limits_{k\longrightarrow\infty} x_{n_k} = x$ . Omdat $f$ rijcompact is volgt $\lim\limits_{k\longrightarrow\infty} y_{n_k} = \lim\limits_{k\longrightarrow\infty} f(x_{n_k}) = f(x)$ ; $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heeft dus een convergente deelrij.

4. (a) (1 punt) Geef de precieze definitie van een 1- resp. 2-aftelbare topologische ruimte.
   (b) (1 punt) Bewijs, gebruikmakend alleen van de definities, dat een 2-aftelbare topologische ruimte ook 1-aftelbaar is.

**Oplossing:** Laat $(X, \mathcal{T})$ een topologische ruimte zijn.

(a) $(X, \mathcal{T})$ heet 1-aftelbaar indien elk punt $x \in X$ een aftelbare omgevingsbasis $\mathcal{B}_x = \{ U_n \mid n \in \mathbb{N} \} \subset \mathcal{T}$ heeft, d.w.z.

$$\forall\, U \in \mathcal{T} \;,\; x \in U \;,\; \exists\, n \in \mathbb{N} \;:\; x \in U_n \subset U \;.$$

$(X, \mathcal{T})$ heet 2-aftelbaar indien $\mathcal{T}$ een aftelbare basis $\mathcal{B} = \{ U_n \mid n \in \mathbb{N} \} \subset \mathcal{T}$ heeft, d.w.z.

$$\forall\, U \in \mathcal{T} \;\exists\, I \subset \mathbb{N} \;:\; U = \bigcup_{i\in I} U_i.$$

(b) Laat $\mathcal{B} = \{ U_n \mid n \in \mathbb{N} \}$ een basis van $\mathcal{T}$ zijn en $x \in X$ . Het is voldoende te laten zien dat

$$\mathcal{B}_x := \{ U_n \in \mathcal{B} \mid x \in U_n \}$$

een omgevingsbasis van $x$ is. Voor $U \in \mathcal{T}$ met $x \in U$ is er een $I \subset \mathbb{N}$ met $U = \bigcup\limits_{i\in I} U_i$ , dus is er een $i \in I \subset \mathbb{N}$ met $x \in U_i \in \mathcal{B}_x$ .

5. (2 punten) Bepaal voor elk van de volgende topologische ruimten de fundamentaalgroep. Een exact bewijs is niet nodig; een goed meetkundig argument (bij voorkeur ondersteund door een plaatje) is voldoende.
   (a) $X = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid xy = 0 \}$
   (b) $K = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = z^2 \}$
   (c) $C = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = 1 \}$
   (d) $H = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 - z^2 = 1 \}$

**Oplossing:** (a) $X$ is de vereniging van het $(x, z)$- en het $(y, z)$ vlak die beide homeomorf met $\mathbb{R}^2$ en dus enkelvoudig samenhangend zijn. De doorsnijding van de twee vlakken is de $z$-as en dus wegsamenhangend. Volgens een stelling is ook $X$ enkelvoudig samenhangend; de fundamentaalgroep is dus triviaal.

(b) $K$ is de standaard kegel. Deze heeft triviale fundamentaalgroep, want hij is samentrekbaar tot één punt (de top (0,0,0)) m.b.v. de continue afbeelding

$$K \times [0, 1] \longrightarrow K \;,\; (p, t) \mapsto (1 - t) \cdot p$$

en dus enkelvoudig samenhangend.

(c) $C$ is de standaard cylinder. Beschouw $S := \{ (x,y,0) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2=1 \} \subset C$ ; $S$ is homeomorph met de eenheidscircel $S^1$. $S$ is een deformatieretract van $C$ via

$$G : C \times [0,1] \longrightarrow C \ , \ G((x,y,z),t) := (x,y,(1-t)z) \ .$$

Omdat $C$ en $S$ wegsamenhangend zijn geldt $\pi_1(C) \cong \pi_1(S) \cong \pi_1(S^1) \cong \mathbb{Z}$ .

(d) $H$ is de eenbladige hyperboloïde. Deze is homeomorf met de cylinder $C$, want

$$H \longrightarrow C \ , \ (x,y,z) \mapsto (\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}, z)$$

is continu met continue inverse

$$C \longrightarrow H \ , \ (x,y,z) \mapsto (x\sqrt{1+z^2}, y\sqrt{1+z^2}, z) \ .$$

Daarom geldt $\pi_1(H) \cong \pi_1(C) \cong \mathbb{Z}$ .

Merk op dat de circel $S$ uit (c) ook een deformatieretract vam $H$ is, maar de retractie is wat moeilijk op te schrijven.

6. Laat $X$,$Y$ en $Z$ wegsamenhangende en lokaal enkelvoudig samenhangende ruimten zijn, $\pi : Y \longrightarrow X$ een overdekking en $\sigma : Z \longrightarrow X$ een universele overdekking. Laat verder $p \in X$ , $q \in Y$ en $r \in Z$ zijn met $\pi(q) = p$ en $\sigma(r) = p$ .

   (a) (0.5 punt) Bewijs dat de afbeelding

   $$\phi : \mathrm{Dek}(Z/X) \longrightarrow \sigma^{-1}(p) \quad , \quad f \mapsto f(r)$$

   bijectief is.

   (b) (2 punten) Op college werd bewezen dat $\mathrm{Dek}(Z,Y) \subset \mathrm{Dek}(Z,X)$ een ondergroep is. Bewijs dat

   $$\mathrm{Dek}(Z,Y) = \mathrm{Dek}(Z,X) \quad \Longleftrightarrow \quad \pi \text{ is een homeomorfisme.}$$

**Oplossing:** (a) Volgens college is er voor elk $z \in \sigma^{-1}(p)$ een uniek $f \in \mathrm{Dek}(Z,X)$ zodat $f(r) = z$ . Existentie betekent de surjectiviteit van $\phi$, uniciteit de injectieviteit.

(b) Omdat $\sigma$ universeel is bestaat er een overdekking $h : Z \longrightarrow Y$ zodat $h(r) = q$ en $\sigma = \pi \circ h$ ; deze is ook universeel.

"$\Rightarrow$": De conclusie in (a) geldt analoog voor $Y$ en $h$ in plaats van $X$ en $\pi$; uit $\mathrm{Dek}(Z,Y) = \mathrm{Dek}(Z,X)$ volgt dus $h^{-1}(q) = \sigma^{-1}(p)$ . Voor verschillende punten $q, q' \in Y$ zijn $h^{-1}(q)$ en $h^{-1}(q')$ disjunkt, dus volgt dat $\pi$ injectief is. $\pi$ is surjectief omdat het een overdekking is, en het is makkelijk te zien dat een bijectieve overdekking een homeomorfisme is.

"$\Leftarrow$": Indien $\pi$ een homeomorfisme is, dan is $pi^{-1}$ ook een overdekking. Er geldt dus behalve $\mathrm{Dek}(Z/Y) \subset \mathrm{Dek}(Z/X)$ ook $\mathrm{Dek}(Z/X) \subset \mathrm{Dek}(Z/Y)$ .