Hertentamen Wiskundige Structuren 2017-2018

Vrijdag 2 februari 2018, 14u00–17u00

Vermeld op elk blad dat je inlevert duidelijk je naam en studentnummer. Rekenmachines en documenten zijn niet toegestaan. Bewijs al je beweringen en formuleer duidelijk de stellingen die je gebruikt, tenzij expliciet in de vraag vermeld staat dat dit niet hoeft. Dit tentamen bestaat uit **6** *opgaven.*

Vraag 1 [13p]

Zij $f : [0, \infty) \to [0, \infty)$ een continue, surjectieve functie, die strikt stijgend is.
(a) Bewijs dat f bijectief is.
(b) Bewijs of weerleg dat f uniform continu is.
(c) Bewijs of weerleg dat f^{-1} continu is.

Vraag 2 [22p]

Zij $0 < b_1 < a_1$ en definieer twee reële rijen $(a_n)_{n\geq 1}$ en $(b_n)_{n\geq 1}$ door $a_{n+1} = \frac{a_n+b_n}{2}$ en $b_{n+1} = \sqrt{a_n b_n}$ voor alle $n \geq 1$.
(a) Bewijs dat voor iedere $n \geq 1$ geldt dat $0 < b_n < a_n$.
(b) Formuleer de Monotone Convergentiestelling.
(c) Bewijs dat de rijen $(a_n)_{n\geq 1}$ en $(b_n)_{n\geq 1}$ convergent zijn.

Vraag 3 [15p]

Herinner je dat een reële rij $(a_n)_{n\geq 0}$ een deelrij is van een reële rij $(b_n)_{n\geq 0}$ als er een strikt stijgende rij natuurlijke getallen $(n_k)_{k\geq 0}$ bestaat, zodat voor iedere $k \geq 0$ geldt dat $a_k = b_{n_k}$.
Laat A de verzameling van alle reële rijen zijn. Definieer de relatie $\sim$ op A door voor ieder paar $(a_n)_{n\geq 0}$ en $(b_n)_{n\geq 0}$ in A te stellen dat $(a_n)_{n\geq 0} \sim (b_n)_{n\geq 0}$ dan en slechts dan als $(a_n)_{n\geq 0}$ een deelrij is van $(b_n)_{n\geq 0}$.
Bewijs of weerleg dat
(a) $\sim$ reflexief is,
(b) $\sim$ symmetrisch is,
(c) $\sim$ transitief is.

Vraag 4 [12p]

Laat A de verzameling van alle priemgetallen zijn.
(a) Bewijs of weerleg dat $\sup A$ bestaat.
(b) Zij $0 < c < \frac{1}{2}$. Bewijs dat c geen verdichtingspunt is van de verzameling $B = \{\frac{1}{p} : p \in A\}$.

Vraag 5 [16p]

(a) Formuleer de Nulpuntstelling.
(b) Laat $f : [0, 2] \to \mathbb{R}$ een continue functie zijn met $f(0) = f(2)$. Bewijs dat er een $x \in [0, 1]$ is, waarvoor geldt dat $f(x) = f(x + 1)$.

Vraag 6 [12p]

Zij $D \subseteq \mathbb{R}$, $x \in D$ en $f : D \to \mathbb{R}$ gegeven. Laat voor iedere $n \in \mathbb{N}$, $f_n : D \to \mathbb{R}$ een continue functie zijn. Stel dat de functierij $(f_n)_{n\geq 0}$ uniform convergeert naar f en laat $(x_n)_{n\geq 0}$ een convergente rij in D zijn met $\lim_{n\to\infty} x_n = x$. Bewijs dat de rij $(f_n(x_n))_{n\geq 0}$ convergeert met $\lim_{n\to\infty} f_n(x_n) = f(x)$.

Totaal: 90p + 10p = 100p.
Succes!