

Tentamen Wiskundige Structuren

22 januari 2009, 10:00–13:00

Bewijs al je beweringen. Schrijf kort, duidelijk en net. Rekenmachines en documenten (bijvoorbeeld het dictaat) zijn niet toegestaan. Tijdsduur: 3 uur. Succes!

- (a) Geef een definitie van gelijkmatigheid van twee verzamelingen A en B .
(b) Bewijs of weerleg: \mathbb{N} en \mathbb{Z} zijn gelijkmatig.

- Bewijs met volledige inductie dat voor iedere $n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ geldt:

$$\sum_{k=1}^{2n} (-1)^k k = n.$$

- (a) Laat $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ en $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ convergente reële rijen zijn, met limieten x en y . Bewijs, rechtstreeks uit de definitie, dat de rij $(x_n - y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ convergeert naar $x - y$.

- (b) Geef een voorbeeld van reële rijen $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ en $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ die niet convergeren terwijl $(x_n - y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ wel convergeert.

- (a) Zij $V \subseteq \mathbb{R}$ niet leeg en naar boven begrensd. Geef definities van bovengrens van V en van $\sup(V)$.

- (b) Laat $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ continu, met $f(0) < 0$ en $f(1) > 0$. Laat $V \subseteq \mathbb{R}$ gedefinieerd zijn door $V = \{x \in [0, 1] : f(x) \leq 0\}$. Bewijs dat V niet leeg is en naar boven begrensd is, dat $\sup(V) \in [0, 1]$, en dat $f(\sup(V)) = 0$.

- Bewijs of weerleg: $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ gegeven door $f(x) = 1/(|x| + 1)$ is uniform continu.

- (a) Laat $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ en $c \in \mathbb{R}$. Geef een definitie van differentieerbaarheid van f in c met afgeleide L .

- (b) Laat $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ twee differentieerbare functies zijn. Bewijs (uit je definitie) dat de productfunctie fg differentieerbaar is en geef de afgeleide. Je mag hierbij resultaten uit het dictaat over continue functies gebruiken.

- Laat $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ een dalende reële rij zijn met limiet 0. Voor $n \in \mathbb{N}$, laat $s_n = \sum_{i=0}^n (-1)^i a_i$. Bewijs dat de rij $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ convergeert. Je mag hierbij alles uit het dictaat gebruiken.

((5+10)+(10)+(5+5)+(5+10)+(10)+(5+10)+(15)=90)